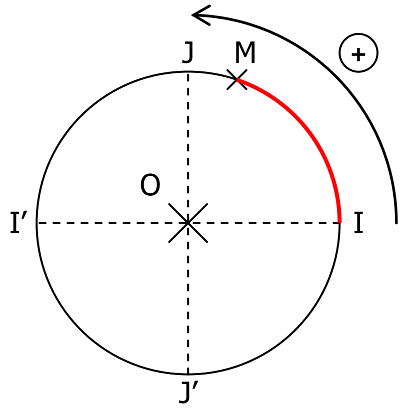
I. LE CERCLE TRIGONOMETRIQUE

a. Repérage d'un point sur le cercle trigonométrique

On appelle *cercle trigonométrique* un cercle de rayon 1 (le sens anti-horaire), autour du quel on a « enroulé » la droite numérique. L'origine est le point I. On définit ensuite un sens de rotation appelé « sens direct »



A tout réel x, on peut associer un point M sur le cercle de la façon suivante :

- si $x > 0$, on parcourt la distance x sur le cercle en partant du point I dans le sens direct.
- si $x < 0$, on parcourt la distance x sur le cercle en partant du point I dans le sens indirect.

La longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ est alors $|x|$.

Exemple :

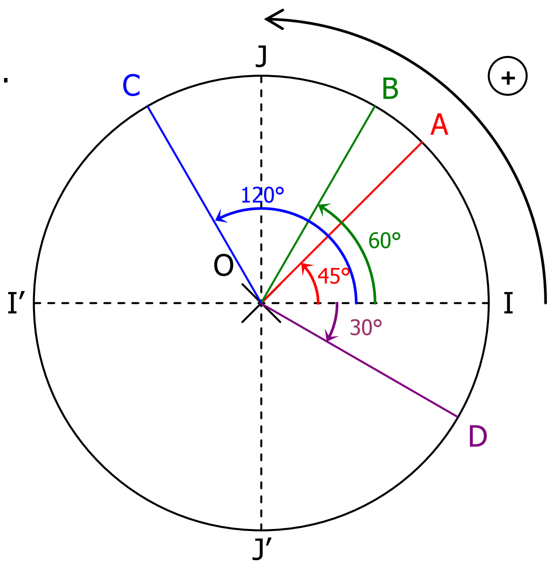
La longueur totale du cercle est : $2 \times \pi \times R = 2 \times \pi \times 1 = 2\pi$

Le point J est **repéré** par le nombre : $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ (un quart de tour dans le sens direct)

Le point J' est repéré par le nombre : $-\frac{\pi}{2}$ (un quart de tour dans le sens indirect) ou $\frac{3\pi}{2}$ (trois quarts de tour dans le sens direct)

b. Angle et longueur de l'arc.

La **longueur de l'arc** intercepté par un angle au centre du cercle trigonométrique est proportionnelle à la mesure de l'angle en degré. Cet angle est **orienté**, c'est-à-dire positif ou négatif suivant le sens dans lequel on tourne.



Exemples :

$\widehat{IOA} = 45° = \frac{1}{8}$ de tour $= \frac{1}{8} \times 2\pi = \frac{\pi}{4}$

$\widehat{IOB} = 60° = \frac{1}{6}$ de tour $= \frac{1}{6} \times 2\pi = \frac{\pi}{3}$

$\widehat{IOC} = 120° = \frac{1}{3}$ de tour $= \frac{1}{3} \times 2\pi = \frac{2\pi}{3}$

$\widehat{IOD} = -30° = \frac{1}{12}$ de tour (sens indirect) $= -\frac{1}{12} \times 2\pi = -\frac{\pi}{6}$

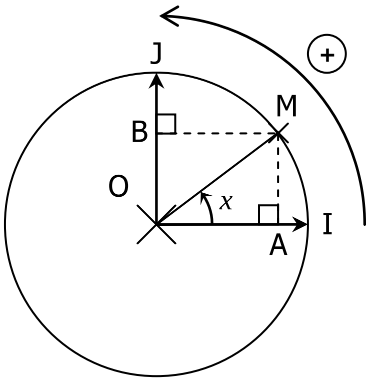
$\widehat{IOI'} = 180°$ = un demi-tour $= \pi$

Remarques :

- Tout point peut être repéré par une infinité de nombres. Par exemple A est associé aux nombres 0 (aucun tour), 2π (un tour), 4π (deux tours…), -2π…
- La longueur de l'arc est en fait une autre façon de mesurer un ange, qu'on appelle le **radian**

II. COSINUS ET SINUS

On munit le cercle trigonométrique d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
Soit x la mesure en radian d'un angle, et M le point tel que $\widehat{\mathbf{IOM}} = x$



Dans le triangle rectangle OAM, on a :

$\cos x = \dfrac{OA}{OM}$

$\cos x = \dfrac{OA}{1}$ (le cercle a pour rayon 1)

$\cos x = OA$

donc **cos x est l'abscisse de M**.

De même

$\sin x = \dfrac{MA}{OM}$

$\sin x = \dfrac{MA}{1}$ (le cercle a pour rayon 1)

$\sin x = MA = OB$

donc **sin x est l'ordonnée de M**.

Conclusion :

Si M est le point associé a réel x sur le cercle trigonométrique, alors **M(cos x ; sin x)**.

Remarques :

- Pour tout x, on a $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- Dans le triangle OAM rectangle en A on a OM = 1, OA = cos x et AM = sin x, alors d'après le théorème de Pythagore $OA^2 + AM^2 = OM^2$ et donc : $\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

Quelques valeurs remarquables :

x *(rad)*	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
x (°)	**0**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1