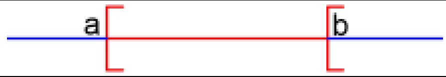
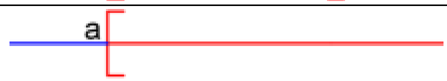
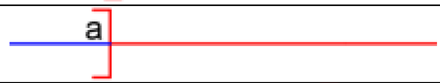
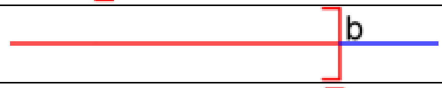
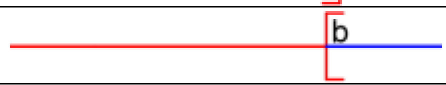
Chap II : Notion d'ordre

I. Notion d'ntervalles

Définition

a et *b* sont deux réels tels que $a < b$.

Le tableau ci-dessous résume les différents types d'intervalles.

L'intervalle noté …	est l'ensemble des réels x tels que …	Représentation de cet intervalle sur une droite graduée
$[a\ ;\ b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a\ ;\ b[$	$a < x < b$	
$]a\ ;\ b]$	$a < x \leq b$	
$[a\ ;\ b[$	$a \leq x < b$	
$[a\ ;\ +\infty[$	$a \leq x$	
$]a\ ;\ +\infty[$	$a < x$	
$]-\infty\ ;\ b]$	$x \leq b$	
$]-\infty\ ;\ b[$	$x > b$	

<u>**Vocabulaire**</u>:

$[a\ ;\ b]$, $]a\ ;\ b[$, $]a\ ;\ b]$ et $[a\ ;\ b[$ sont des intervalles **d'extrémités** (ou **bornes**) *a* et *b* ($a < b$).

Le **centre de l'intervalle** est le nombre $\dfrac{a+b}{2}$

Sa **longueur** ou son **amplitude** est $b - a$.

<u>Remarques :</u>

$-\infty$ (moins l'infini) et $+\infty$ (plus l'infini) ne sont pas des nombres, ce sont des symboles.
Du côté de $-\infty$ et de $+\infty$, le crochet est toujours ouvert, par convention.
L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ se note aussi $]-\infty\ ;\ +\infty[$: cet intervalle est dit **ouvert**.
Les 4 premiers intervalles ci-dessus sont bornés

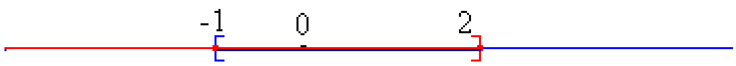
Réunion et intersection d'intervalles

L'**intersection** de deux intervalles est l'ensemble des nombres réels appartenant **à la fois** aux deux intervalles.
La **réunion** de deux intervalles est l'ensemble des nombres réels appartenant à l'un **ou** l'autre de ces intervalles (les éléments de l'intersection appartiennent aussi à la réunion).

<u>*Exemples :*</u>

- $[2\ ;\ 5] \cap [4\ ;\ 6] = [4\ ;\ 5]$ et $[2\ ;\ 5] \cup [4\ ;\ 6] = [2\ ;\ 6]$.

- $]-\infty\ ;\ 2] \cap [-1\ ;\ +\infty[= [-1\ ;\ 2]$ et $]-\infty\ ;\ 2] \cup [-1\ ;\ +\infty[=]-\infty\ ;\ +\infty[= \mathbb{R}$



Remarque : Une intersection peut être vide et ne contenir aucun élément

Exemples : $[2\,;4] \cap [7\,;9] = \varnothing$

II. Notion de comparaison

Comparer deux fractions dont le dénominateur est positif :

Il faut mettre ces deux fractions au même dénominateur.

Exemple : Comparer $\frac{8}{9}$ et $\frac{11}{12}$ → $\frac{8}{9} = \frac{8\times4}{9\times4} = \frac{32}{36}$ et $\frac{11}{12} = \frac{11\times3}{12\times3} = \frac{33}{36}$ donc $\frac{8}{9} < \frac{11}{12}$

Comparer deux radicaux :

Il peut souvent préférable de comparer leurs carrés.

Exemple : comparer $\sqrt{5} - 1$ et $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$

$$\left(\sqrt{5}-1\right)^2 = 5 - 2\sqrt{5} + 1 = 6 - 2\sqrt{5} \quad \text{et} \quad \left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2 = 6 - 2\sqrt{5} \quad \text{donc} \quad \left(\sqrt{5}-1\right)^2 = \left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2$$

Comparer deux radicaux :

Il faut souvent étudier le signe de la différence.
Si a est inférieur à b, la différence a – b est négative.

Exemple : Soient x et y deux nombres réels. Comparer $(x+y)^2$ et $2xy$.

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad \rightarrow (x+y)^2 - 2xy = x^2 + y^2 \quad \text{donc} \quad (x+y)^2 - 2xy > 0$$

$$\text{soit} \quad (x+y)^2 > 2xy$$

III. Règles de calcul pour les inéquations

Règle d'addition :

Additionner membre à membre conserve l'ordre :
Soit $a, b \in \mathbb{R}$: si $a < b$ alors $a + c < b + c$

Démonstration : Si $a < b$ alors $a - b < 0$
→ $(a+c) - (b+c) = a + c - b - c = a - b < 0$ donc on a : $a + c < b + c$

Règle de multiplication :

Multiplier par un nombre strictement positif conserve l'ordre.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$: si $a < b$ et $c > 0$ alors $ac < bc$
Multiplier par un nombre strictement négatif change l'ordre .
Soit $a, b \in \mathbb{R}$: si $a < b$ et $c < 0$ alors $ac > bc$

Démonstration :

1er cas : on suppose que $c > 0$
$a < b$ donc $(a - b) < 0$
Le produit de 2 nombres de signes contraires est négatif
donc $c(a-b) < 0$
donc $ac - bc < 0$
donc $ac < bc$

2ème cas : on suppose que $c < 0$
$a < b$ donc $(a - b) < 0$
le produit de 2 nombres de même signe est positif
donc $c(a-b) > 0$
donc $ac - bc > 0$
donc $ac > bc$

IV Valeur absolue

Valeur absolue d'un nombre

La **valeur absolue** d'un nombre, notée $|x|$, est égale à :

- ce nombre s'il est positif,
- l'opposé de ce nombre s'il est négatif

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

Exemples : $|8| = 8$ et $|-7| = 7$

Propriétés :

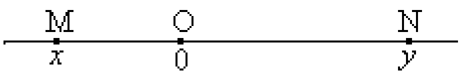
1. Dire que $|x| = 0$ équivaut à dire que $x = 0$.
2. $|-x| = |x|$
3. Dire que $|x| = |y|$ équivaut à dire que $x = y$ ou $x = -y$.

Distance entre deux réels

La **distance** entre deux réels x et y est la différence entre le plus grand et le plus petit.
Cette distance est notée $|\boldsymbol{x - y}|$ ou encore $|\boldsymbol{y - x}|$.
$|\boldsymbol{x - y}|$ se lit « valeur absolue de x moins y ».

Exemples :
- $|3 - 5|$ est la distance entre les réels 3 et 5. Cette distance est égale à 5 – 3 = 2.
- $|-2 - 3|$ est la distance entre les réels –2 et 3. Cette distance est égale à 3 – (-2) = 5.

Interprétation graphique de $|x - y|$



Sur une droite graduée d'origine O, notons M le point d'abscisse x et N le point d'abscisse y.
$|x - y|$ est la distance entre les points M et N, c'est à dire MN.

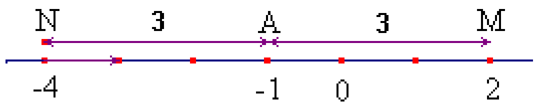
Application : Soient A, B et M trois points distincts d'une droite graduée.
On note a, b et x les abscisses respectives des points A, B et M.
L'égalité $|x - a| = |x - b|$ se traduit par MA = MB, avec A, B et M alignés :
→ cela signifie que M est le milieu du segment [AB].

Exercice : Trouver tous les nombres x *tels que* $|x + 1| = 3$.

Soit A et M les points d'abscisses respectives -1 et x sur une droite graduée :

AM = $|x - (-1)|$ = $|x + 1|$

Trouver tous les nombres x tels que $|x + 1| = 3$ revient donc à trouver les abscisses des points M de la droite graduée tels que AM = 3.



Les nombres cherchés sont donc : 2 et –4.

DEMO : si $x+1>0$, alors $|x+1| = x+1$ et l'équation devient : $x+1=3 \Leftrightarrow x=2$

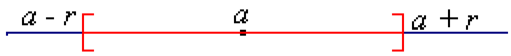
si $x+1<0$, alors $|x+1| = -x-1$ et l'équation devient : $x+1=3 \Leftrightarrow x=2$

Inégalité $|x - a| \leq r$ (*a* et *r* fixés, *r* > 0)

Propriété : a est un réel, r est un réel strictement positif.

Dire que $|x - a| \leq r$ équivaut à dire que x appartient à l'intervalle $[a - r\ ;\ a + r]$.

__Démonstration :__ $|x - a| \leq r$ signifie que la distance de x à a est inférieure ou égale à r, c'est à dire que x appartient à l'ensemble représenté en rouge sur la figure ci-contre.



Donc $|\mathrm{x} - \mathrm{a}| \leq \mathrm{r} \Leftrightarrow x \in [a-r\,;a+r] \Leftrightarrow a-r \leq x \leq a+r$

__Exemple :__ Résoudre l'inéquation $|x+7| \leq 3$

Si $x+7 \geq 0$, l'inéquation devient $x+7 \leq 3$
Soit $x \leq -4$

$S_1 =]-\infty\,;-4]$

Si $x+7 \leq 0$, l'inéquation devient $-x-7 \leq 3$
Soit $-x \leq 10$
$x \geq -10$

$S_2 = [-10\,;+\infty[$

La solution est : $S = S_1 \cap S_2 =]-\infty\,;-4] \cap [-10\,;+\infty[= [-10\,;-4]$

__Exemple :__ Résoudre l'inéquation $|x+7| \leq -2$

__Ne vous laissez pas piéger par la méthode si dessous incorrecte car …__

Une valeur absolue ne peut être négative : $S = \varnothing$

~~Si $x+7 \geq 0$, l'inéquation devient $x+7 \leq -2$~~
~~Soit $x \leq -9$~~

~~$S_1 =]-\infty\,;9]$~~

~~Si $x+7 \leq 0$, l'inéquation devient $-x-7 \leq -2$~~
~~Soit $-x \leq 5$~~
~~$x \geq -5$~~

~~$S_2 = [5\,;+\infty[$~~

~~La solution est :~~ ~~$S = S_1 \cap S_2 =]-\infty\,;9] \cap [5\,;+\infty[= [5\,;9]$~~