FONCTIONS POLYNÔMES DU SECOND DEGRE

1. Définition FONCTIONS POLYNÔMES

Définition

Une fonction polynôme du second degré de la variable x (ou **fonction du second degré**), est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=ax^2+bx+c$, où a, b et c sont des nombres réels donnés, avec $a \neq 0$.

L'expression ax^2+bx+c où $a \neq 0$, est appelée **polynôme du second degré**.

→ a est appelé coefficient de x^2 , b est le coefficient de x, c est appelé la **constante**.

Exemples :

f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+5$ est une fonction polynôme du 2nd degré avec $a=\frac{1}{2}$, $b = -3$ et $c = 5$

g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=-3+4x^2$ est une fonction polynôme du 2nd degré avec $a = 4$, $b = 0$ et $c = -3$

h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=-2x+0{,}1x^2$ est une fonction polynôme du 2nd degré avec $a = 0{,}1$, $b = -2$ et $c = 0$

k définie sur $\mathbb{R}$ par : $k(x)=(1+x)(3-2x)$ est une fonction polynôme du 2nd degré , $a = -2$, $b = 1$ et $c = 3$

car $k(x)=-2x^2+x+3$

→ $-2x^2+x+3$ est la **forme développée réduite** du polynôme $k(x)$.

2. Transformation de l'expression ax^2+bx+c : forme canonique

a. Approche

Rappel : pour tous réels x et k , $x^2-2kx+k^2=(x-k)^2$ et $x^2+2kx+k^2=(x+k)^2$

1°) Factoriser les expressions :

- $x^2+4x+4=x^2+2\times x\times 2+2^2=(x+2)^2$
- $x^2-2x+1=x^2-2\times x\times 1+1^2=(x-1)^2$
- $x^2-6x+9=x^2-2\times x\times 3+3^2=(x-3)^2$
- $x^2+16x+64=x^2+2\times x\times 8+8^2=(x+8)^2$
- $x^2+5x+\frac{25}{4}=x^2+2\times x\times\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$
- $x^2-x+\frac{1}{4}=x^2+2\times x\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

2°) **Ecrire sous la forme** $(x-\alpha)^2+\beta$ **chacune des expressions suivantes**, x désignant une variable réelle et α , β des réels à déterminer:

- $x^2-2x=\left(x^2-2x+1\right)-1=(x-1)^2-1$
- $x^2+2x=\left(x^2+2x+1\right)-1=(x+1)^2-1$
- $x^2-4x=\left(x^2-4x+4\right)-4=(x-2)^2-4$
- $x^2-6x+5=\left(x^2-6x+9\right)-9+5=(x-3)^2-4$
- $x^2+5x-11=\left(x^2+5x+\frac{25}{4}\right)-\frac{25}{4}-11=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{69}{4}$
- $x^2-3x+\frac{7}{4}=\left(x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)-\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{7}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$
- $x^2+px+q=\left(x^2+2\times x\times\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2\right)-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}$

3°) **Ecrire sous la forme** $a\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$ **chacun des polynômes suivants :**

- $2x^2-8x+5=2\left[\left(x^2-4x+4\right)-4+\dfrac{5}{2}\right]=2\left[(x-2)^2-\dfrac{3}{2}\right]$

- $-\dfrac{1}{2}x^2+x-3=-\dfrac{1}{2}\left(x^2-2x+6\right)=-\dfrac{1}{2}\left[\left(x^2-2x+1\right)-1+6\right]=-\dfrac{1}{2}\left[(x-1)^2+5\right]$

- $3x^2-4x+3=3\left(x^2-\dfrac{4}{3}x+1\right)=3\left[\left(x^2-\dfrac{4}{3}x+\left(\dfrac{4}{6}\right)^2\right)-\left(\dfrac{4}{6}\right)^2+1\right]=3\left[\left(x-\dfrac{4}{6}\right)-\dfrac{16}{36}+1\right]=3\left[\left(x-\dfrac{4}{6}\right)+\dfrac{5}{9}\right]$

b. Cas général

Théorème

Tout fonction polynôme du second degré $f(x)=ax^2+bx+c$ peut s'écrire sous la forme :

$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ où α et β sont des réels définis par $\begin{cases}\alpha=\dfrac{-b}{2a}\\ \beta=\dfrac{-b^2+4ac}{4a}\end{cases}$.

L'écriture $a(x-\alpha)^2+\beta$ est appelée la **forme canonique** du polynôme $P(x)$.

Démo.

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{2a^2}+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{ab^2}{4a^2}+\frac{ac}{a}=a\left(x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2-\frac{b^2}{4a}+\frac{4ac}{4a}=a\left(x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a}$$

Ainsi : $\begin{cases}\alpha=\dfrac{-b}{2a}\\ \beta=\dfrac{-b^2+4ac}{4a}\end{cases}$

Remarque : Cette écriture est importante car elle nous permet de déduire tous les résultats suivants.

3. Variations et courbe représentative

Propriété1

Soit f : $x\mapsto ax^2+bx+c$ une fonction polynôme du second degré, et $x\mapsto a(x-\alpha)^2+\beta$ sa forme canonique.

1. Si $\boxed{a>0}$: f est **décroissante** sur l'intervalle $]-\infty\,;\alpha]$ et f est **croissante** sur l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

f admet **un minimum** pour $x=\alpha$ sur $\mathbb{R}$, atteint en β .   .

2. Si $\boxed{a<0}$: f est **croissante** sur l'intervalle $]-\infty\,;\alpha]$ et f est **décroissante** sur l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
variations de f	$-\infty$ ↗	β	↘ $-\infty$

f admet **un maximum** pour $x=\alpha$ sur $\mathbb{R}$, atteint en β.

Propriété et définition

Soit f une fonction polynôme du second degré et $x \mapsto a(x-\alpha)^2+\beta$ $(a \neq 0)$ sa forme canonique.

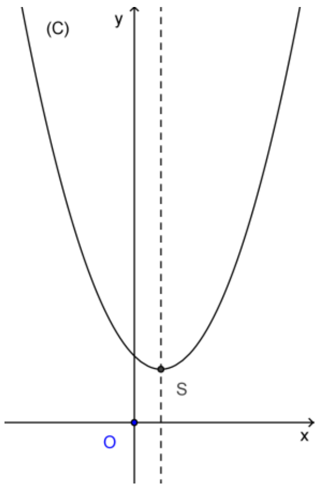
• La courbe (P) représentative de f dans le plan rapporté à un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est une **parabole**.

• Le point S de (P) de coordonnées $(\alpha\,;\beta)$ est le **sommet** de la parabole (P).

• La droite passant par S et parallèle à l'axe des **ordonnées** est un **axe de symétrie** de la parabole (P).

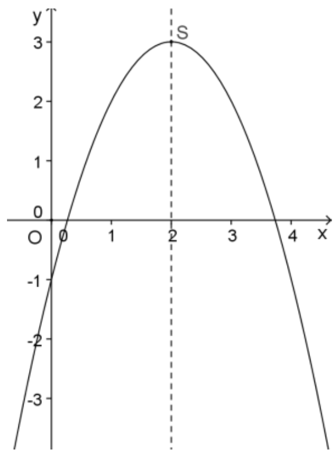
→Son équation est : $x=\alpha$

Si a > 0



Les branches de la parabole sont tournées vers le **haut**

Si a < 0



Les branches de la parabole sont tournées vers le **bas**

Application 1

Soit g la fonction définie par $g(x)=-2x^2+5x+7$ et (P) sa courbe représentative.

1. Préciser l'ensemble de définition de g, noté D_g.

Il n'y a aucune valeur interdite, donc $D_g=\mathbb{R}$

2. Montrer que, pour tout x de D_g, $g(x)=-2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{81}{8}$.

$g(x)=-2x^2+5x+7$, donc a = −2 , b = 5 , c = 7 ,

ainsi : $\begin{cases} \alpha=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-5}{2\times(-2)}=\dfrac{5}{4} \\ \beta=\dfrac{-b^2+4ac}{4a}=\dfrac{-5^2+4\times(-2)\times 7}{4\times(-2)}=\dfrac{-25-56}{-8}=\dfrac{81}{8} \end{cases}$ et $g(x)=a(x-\alpha)^2+\beta=-2\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{81}{8}$

3. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

$a < 0$ donc g est **croissante** sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{5}{4}\right]$ et f est **décroissante** sur l'intervalle $\left[\frac{5}{4}\,;+\infty\right[$.

x	$-\infty$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$
variations de g	$-\infty$ $\nearrow$	$\frac{81}{8}$	$\searrow$ $-\infty$

4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (P) avec chacun des axes du repère.

Intersection avec l'axe des ordonnées :

$$g(0)=-2\left(0-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{81}{8}=-2\times\frac{25}{16}+\frac{81}{8}=\frac{-25}{8}+\frac{81}{8}=\frac{56}{8}=7 \text{ d'où le point } \mathrm{A}(0;7).$$

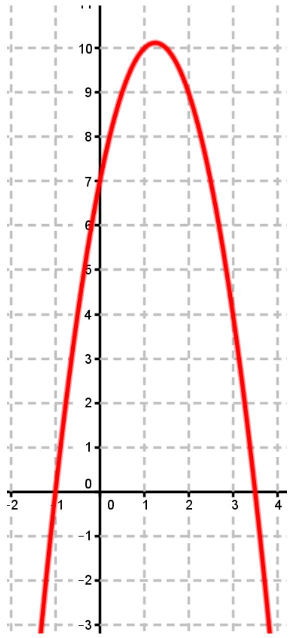
Intersection avec l'axe des abscisses :

$$g(x)=0 \Leftrightarrow -2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{81}{8}=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{81}{16}=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{9}{4}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{5}{4}+\frac{9}{4}\right)\left(x-\frac{5}{4}-\frac{9}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{4}{4}\right)\left(x-\frac{14}{4}\right)=0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x-\frac{7}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ ou \\ x-\frac{7}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ ou \\ x=\frac{7}{2} \end{cases} \text{ d'où les points } \mathrm{B}(-1;0) \text{ et } \mathrm{C}\left(\frac{7}{2};0\right)$$

5. Tracer la courbe (P) dans un repère orthonormal.



Application 2

Soit f la fonction définie par $f(x)=x^2-4x+3$ et (P) sa courbe représentative.

1. Préciser l'ensemble de définition de *f*, noté D_f .

Il n'y a aucune valeur interdite, donc $D_f=\mathbb{R}$

2. Déterminer les réels α et β tels que, pour tout réel x, $f(x)=(x-\alpha)^2+\beta$.

$f(x)=x^2-4x+3$, donc a = 1 , b = –4 , c = 3 ,

ainsi : $\begin{cases} \alpha=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-(-4)}{2\times1}=\dfrac{4}{2}=2 \\ \beta=\dfrac{-b^2+4ac}{4a}=\dfrac{-(-4)^2+4\times1\times3}{4\times1}=\dfrac{-16+12}{4}=\dfrac{-4}{4}=-1 \end{cases}$ et $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta=1(x-2)^2-1$

3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

a < 0 donc g est **décroissante** sur l'intervalle $]-\infty\,;2]$ et f est **croissante** sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
variations de f	$+\infty$ ↘	-1	↗ $+\infty$

4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (P) avec chacun des axes du repère.

Intersection avec l'axe des ordonnées :

$f(0)=(0-2)^2-1=4-1=3$ d'où le point A$(0;3)$.

Intersection avec l'axe des abscisses :

$f(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)^2-1=0 \Leftrightarrow (x-2)^2-1^2=0 \Leftrightarrow (x-2+1)(x-2-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ ou \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ ou \\ x=3 \end{cases}$ d'où les points B$(1;0)$ et C$(3;0)$

5. Tracer la courbe (P) dans un repère orthonormal.

6. a. Tracer dans le même repère la droite (d) d'équation $y=-2x+3$.

b. Calculer les coordonnées des points d'intersection de (P) et (d).

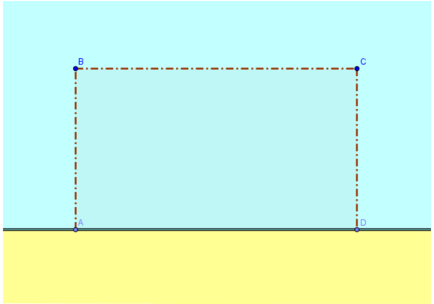
→il faut résoudre l'équation :
$$x^2-4x+3=-2x+3$$
$$x^2-4x+3+2x-3=0$$
$$x^2-2x=0$$
$$x(x-2)=0$$
$\rightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ ou \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ ou \\ x=2 \end{cases}$

→ $f(0)=(0-2)^2-1=4-1=3$ d'où le point A$(0;3)$.

→ $f(2)=(2-2)^2-1=0-1=-1$ d'où le point D$(2;-1)$.

c. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)<-2x+3$.

$S=]0;2[$



<u>Application 3 : un problème d'optimisation</u>

Un maître-nageur sauveteur veut créer une zone de baignade (ZDB) rectangulaire (pour faire des longueurs) et d'aire maximale (pour que les nageurs se sentent à l'aise).

Il possède 100 m de corde et se dit qu'il peut utiliser le bord de la plage pour constituer l'un des côtés de la ZDB !!!

Pourriez-vous donner les dimensions exactes de la ZDB ?

1. On note x la longueur AB.
   a. Exprimer en fonction de x la deuxième dimension de ce rectangle.
   b. A quel intervalle I appartient x ?
2. a. Exprimer en fonction de x, l'aire $A(x)$ (en m^2) de la zone de baignade.
   b. Montrer que pour tout réel x de I, $A(x)=-2(x-25)^2+1250$.
   c. En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire de la ZDB est maximale.
   Préciser cette aire maximale, ainsi que les dimensions correspondantes de la zone de baignade.
3. Etudier les variations de la fonction A et dresser son tableau de variation.

<u>Algorithmique :</u> 

Créer un algorithme et/ou un programme à la calculatrice permettant de déterminer le sommet de la parabole, l'équation de l'axe de symétrie et les variations de la fonction $f: x \mapsto ax^2+bx+c$.
