

Exercice 1

(5 points)

Q C M (+0,5 point par bonne réponse et -0,5 point par mauvaise réponse)

1 - Si $x < 2$ alors $-4x > -8$

2 - Si $x > 3$ alors $-2x < -6$

3 - Si $x < -5$ alors $x^2 > 25$

4 - Si $-3 < x < 4$ alors $9 < x^2 < 25$

5 - Si $x < 3$ alors $x^2 < 9$

6 - Si $x > 4$ alors $\frac{1}{x} < \frac{1}{4}$

7 - Si $-3 < x < 0$ alors $-\frac{1}{3} > \frac{1}{x}$

8 - Les carrés des nombres positifs sont rangés dans le même ordre que ces nombres.

9 - Les inverses des nombres strictement positifs sont rangés dans l'ordre contraire de ces nombres.

10- Les inverses de deux nombres de signes contraires sont rangés dans l'ordre contraire de ces nombres.

Exercice 2

(5 points)

Soit $f : x \mapsto -5x^2 + 3$ a) Montrer que f est décroissante sur $[0; +\infty[$ b) Montrer que f est croissante sur $]-\infty; 0]$ c) Montrer que 3 est le maximum de f sur \mathbb{R} d) Résoudre graphiquement $f(x) = 1$ puis retrouver ce résultat par le calcule) Résoudre graphiquement $f(x) > 1$ puis retrouver ce résultat par le calcul**Exercice 3**

(7 points)

Soit $f : x \mapsto \frac{3x-5}{x-1}$ une fonction définie pour tout réel x différent de 1a) Montrer que $f(x) = 3 - \frac{2}{x-1}$.b) Étudier le sens de variation de f sur $]-\infty; 1[$ puis sur $]1; +\infty[$.c) Montrer que si $x > 2$ alors $f(x) > 1$ d) Encadrer $f(x)$ si $x \in [5; 10]$ e) Tracer la courbe représentant la fonction f sur la feuille jointe.f) Résoudre graphiquement $f(x) = 1$ puis retrouver ce résultat par le calcul.g) Résoudre graphiquement $f(x) > 1$ puis retrouver ce résultat par le calcul.**Exercice 4**

(3 points)

Soit $f : x \mapsto -2(x-3)^2 + 6$ a) Étudier le sens de variation de f sur $]-\infty; 3]$ puis sur $[3; +\infty[$ b) À partir de la définition du maximum, montrer que 6 est le maximum de f .c) Soit $g : x \rightarrow 8x - 10$ Déterminer graphiquement les abscisses du ou des point(s) d'intersection éventuel(s) des courbes représentatives des fonctions f et g , puis retrouver les résultats par le calcul.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. QUET

Exercice 1

(5 points)

- 1 - Si $x < 2$ alors $-4x > -8$ **Vrai** : on multiplie des termes d'une inéquation par un nombre négatif
- 2 - Si $x > 3$ alors $-2x < -6$ **Vrai** : pour la même raison
- 3 - Si $x < -5$ alors $x^2 > 25$ **Vrai** : si $x < -5$ alors $|x| > +5$, donc $x^2 > 25$
- 4 - Si $-3 < x < 4$ alors $9 < x^2 < 25$ **Faux** : $0 \in [-2; 3]$ et $0^2 = 0$ or $0^2 \notin [9; 25]$
- 5 - Si $x < 3$ alors $x^2 < 9$ **Faux** : car $-5 < 3$ et $(-5)^2 = 25$ or $(-5)^2 > 9$
- 6 - Si $x > 4$ alors $\frac{1}{x} < \frac{1}{4}$ **Vrai** : on change le sens de l'inéquation en inversant les termes
- 7 - Si $-3 < x < 0$ alors $-\frac{1}{3} > \frac{1}{x}$ **Vrai** : les signes de l'inéquation changent
- 8 - Les carrés des nombres positifs sont rangés dans le même ordre que ces nombres
Vrai : pour tous nombres positifs a et b : si $a < b$ alors $a^2 < b^2$
- 9 - Les inverses des nombres strictement positifs sont rangés dans l'ordre contraire de ces nombres.
Vrai : pour tous nombres positifs a et b : si $a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
- 10- Les inverses de deux nombres de signes contraires sont rangés dans l'ordre contraire de ces nombres.
Faux : soit $a < 0$ et $b > 0$ alors $a < b$, et $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ car $\frac{1}{a}$ est négatif.

Exercice 2

(5 points)

Soit $f : x \mapsto -5x^2 + 3$

- a) Soit u et v deux réels appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$ tels que $u < v$

$$\text{Alors : } f(u) - f(v) = (-5u^2 + 3) - (-5v^2 + 3) = -5u^2 + 3 + 5v^2 - 3 = 5(v^2 - u^2) = 5(v+u)(v-u)$$

$u > 0$ et $v > 0$ donc $v+u > 0$; comme $u < v$ alors $v-u > 0$; **ainsi** $f(u) - f(v) > 0$

La fonction $f : x \mapsto -5x^2 + 3$ est décroissante sur $[0; +\infty[$.

- b) Soit u et v deux réels appartenant à l'intervalle $]-\infty; 0]$ tels que $u < v$

$$\text{De même } f(u) - f(v) > 0 = 5(v+u)(v-u)$$

$$u < 0 \text{ et } v < 0 \text{ donc } v+u < 0 ; \text{ comme } u < v \text{ alors } v-u > 0 ; \text{ ainsi } f(u) - f(v) < 0$$

La fonction $f : x \mapsto -5x^2 + 3$ est croissante sur $]-\infty; 0]$.

- c) $f(x) = 3 - 5x^2$, or $x^2 \geq 0$ donc $-5x^2 \leq 0$ et $-5x^2 + 3 \leq 3$: ainsi 3 est le maximum de f sur \mathbb{R} .

- d) On trace la courbe représentative de la fonction f , puis la droite horizontale d'équation $y = 1$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-42	-17	-2	3	-2	-17	-42

On trouve 2 points d'intersection d'abscisses comprises l'une entre $-0,7$ et $-0,6$, l'autre entre $0,6$ et $0,7$

$$\text{Par le calcul, il faut résoudre : } -5x^2 + 3 = 1, \text{ soit } -5x^2 = -2 ; \text{ soit } x^2 = \frac{2}{5} \text{ ou } x^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 = 0$$

$$\text{Ceci donne : } \left(x + \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{5}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{5}\right) = 0 : \text{ deux solutions : } \frac{\sqrt{10}}{5} \text{ et } -\frac{\sqrt{10}}{5}, \text{ avec } \frac{\sqrt{10}}{5} \approx 0,63$$

- e) Graphiquement $f(x) > 1$ si $x \in]-0,6; 0,6[$

Par le calcul, il faut résoudre : $-5x^2 + 3 > 1$, soit $-5x^2 > -2$; soit $x^2 < \frac{2}{5}$ ou $x^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 < 0$

On utilise un tableau de signes pour résoudre Ceci donne : $\left(x + \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{5}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{5}\right) < 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{10}}{5}$	$\frac{\sqrt{10}}{5}$	$+\infty$
$x + \frac{\sqrt{10}}{5}$		-	+	+
$x - \frac{\sqrt{10}}{5}$		-	-	+
$\left(x + \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{5}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{5}\right)$		+	-	+

Ainsi $\left(x + \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{5}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{5}\right) < 0$ si $x \in \left]-\frac{\sqrt{10}}{5}; \frac{\sqrt{10}}{5}\right[$, soit $f(x) > 1$ si $x \in \left]-\frac{\sqrt{10}}{5}; \frac{\sqrt{10}}{5}\right[$.

Exercice 3

(7 points)

Soit $f : x \mapsto \frac{3x-5}{x-1}$

a) Il faut que x soit différent de 1 pour que le dénominateur soit non nul.

$$3 - \frac{2}{x-1} = 3 \times \frac{x-1}{x-1} - \frac{2}{x-1} = \frac{3x-3-2}{x-1} = \frac{3x-5}{x-1} = f(x) \text{ pour tout réel } x \text{ différent de } 1.$$

b) Etude sur $]-\infty; 1]$: Soit u et v deux réels appartenant à l'intervalle $]-\infty; 1]$ tels que $u < v$

$$f(u) - f(v) = \left(3 - \frac{2}{u-1}\right) - \left(3 - \frac{2}{v-1}\right) = -\frac{2}{u-1} + \frac{2}{v-1} = \frac{-2(v-1) + 2(u-1)}{(u-1)(v-1)} = \frac{-2v + 2 + 2u - 2}{(u-1)(v-1)}$$

$$\text{soit } f(u) - f(v) = \frac{2(u-v)}{(u-1)(v-1)}$$

Comme $v < 1$ et $u < 1$ alors $v-1 < 0$ et $u-1 < 0$, donc $(u-1)(v-1) > 0$;

Par hypothèse $u < v$ alors $u-v < 0$; ainsi $f(u) - f(v) < 0$: **f est croissante sur $]-\infty; 1]$**

Sur l'intervalle $[1; +\infty[$: Soit u et v deux réels appartenant à l'intervalle $[1; +\infty[$ tels que $u < v$

$$\text{De même : } f(u) - f(v) = \frac{2(u-v)}{(u-1)(v-1)}$$

Comme $v > 1$ et $u > 1$ alors $v-1 > 0$ et $u-1 > 0$, donc $(u-1)(v-1) > 0$;

Par hypothèse $u < v$ alors $u-v < 0$; ainsi $f(u) - f(v) < 0$: **f est croissante sur $[1; +\infty[$**

c) Si $x > 2$ alors $x-1 > 1$, et $\frac{1}{x-1} < \frac{1}{1}$ soit $\frac{1}{x-1} < 1$. Alors $-2 \times \frac{1}{x-1} > -2 \times 1$, soit $\frac{-2}{x-1} > -2$

On obtient : $\frac{-2}{x-1} + 3 > -2 + 3$, soit $f(x) > 1$

d) f est croissante sur $[1; +\infty[$ donc f est aussi croissante sur l'intervalle $[5; 10]$.

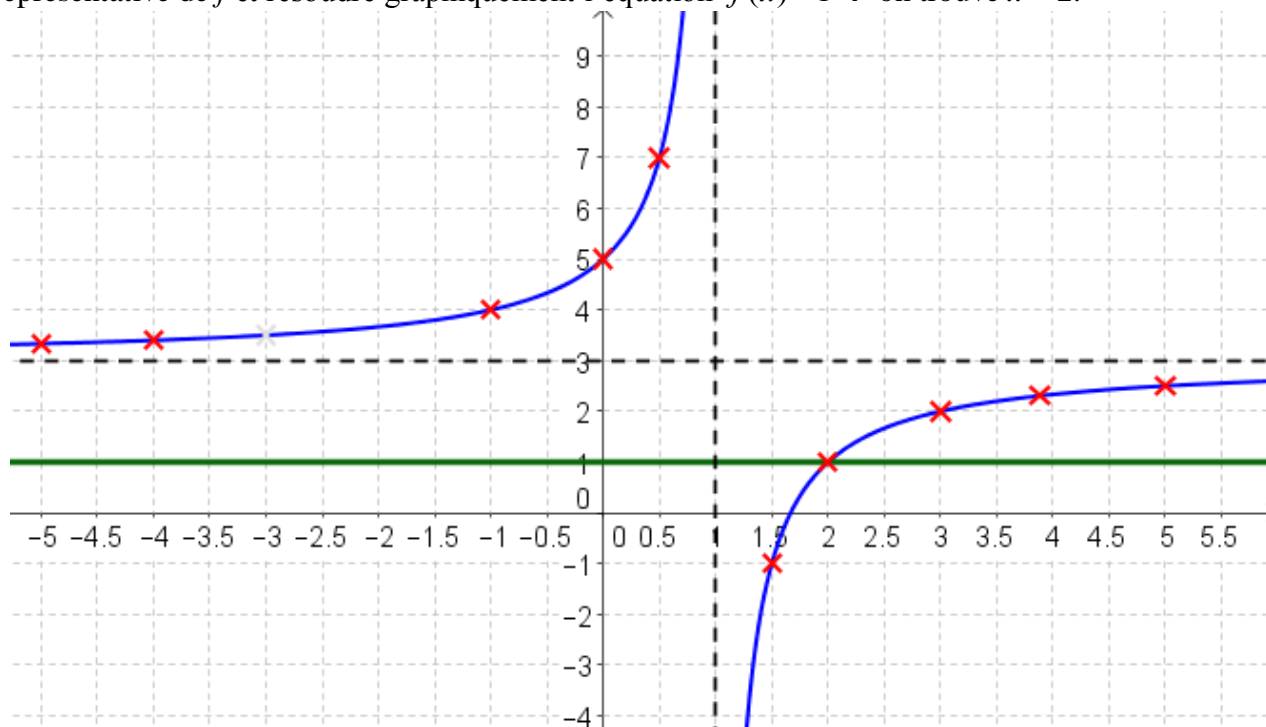
$$\text{Le minimum de } f \text{ est } f(5) = \frac{3 \times 5 - 5}{5 - 1} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \text{ , son maximum est } f(10) = \frac{3 \times 10 - 5}{10 - 1} = \frac{25}{9}$$

$$\text{Donc si } x \in [5; 10] \text{ , } \frac{5}{2} \leq f(x) \leq \frac{25}{9}$$

e) Pour tracer la courbe représentant la fonction f , on peut réaliser un tableau de valeur :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	0,5	0,9	1,5	2	3	4	5
$f(x)$	$\frac{10}{3}$	3,4	3,5	$\frac{11}{3}$	4	5	7	23	0	1	2	$\frac{8}{3}$	2,5

f) On trace la droite horizontale d'équation $y = 1$ pour regarder les intersections avec la courbe représentative de f et résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1 \rightarrow$ on trouve $x = 2$.



Par le calcul : $f(x) = 1$ revient à : $\frac{3x-5}{x-1} = 1$, soit : $3x-5 = (x-1) \times 1$, d'où : $3x-5 = x-1$

On obtient : $3x-x=5-1$, soit $2x=4$ et $x=2$

g) Graphiquement $f(x) > 1$ si $x \in]-\infty; 1 [\cup] 2; +\infty [$

Par le calcul : $f(x) > 1$ revient à : $\frac{3x-5}{x-1} > 1$, soit $\frac{3x-5}{x-1} - 1 > 0$, d'où : $\frac{3x-5}{x-1} - \frac{x-1}{x-1} > 0$

On obtient : $\frac{3x-5-x+1}{x-1} > 0$, soit : $\frac{2x-4}{x-1} > 0$ ou $\frac{2(x-2)}{x-1} > 0$

On utilise un tableau de signes :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-2$		-			○		+
$x-1$		-					+
$\frac{2(x-2)}{x-1}$		+			○		+

$\frac{2(x-2)}{x-1} > 0$ si $x \in]-\infty; 1 [\cup] 2; +\infty [$

On retrouve le même résultat : $f(x) > 1$ si $x \in]-\infty; 1 [\cup] 2; +\infty [$

Exercice 4

(3 points)

Soit $f : x \mapsto -2(x-3)^2 + 6$

d) Etude sur $]-\infty; 3]$: Soit u et v deux réels appartenant à l'intervalle $]-\infty; 3]$ tels que $u < v$

$$f(u) - f(v) = (-2(u-3)^2 + 6) - (-2(v-3)^2 + 6) = -2(u-3)^2 + 2(v-3)^2 = 2[(v-3)^2 - (u-3)^2]$$

$$\text{Ainsi : } f(u) - f(v) = 2[(v-3) + (u-3)][(v-3) - (u-3)] = 2(u+v-6)(v-u)$$

Comme $v < 3$ et $u < 3$ alors $u+v < 6$ donc $u+v-6 < 0$;

Par hypothèse $u < v$ alors $v-u > 0$; **ainsi** $f(u) - f(v) < 0$: **f est croissante sur** $]-\infty; 3]$

Etude sur $[3; +\infty[$: Soit u et v deux réels appartenant à l'intervalle $[3; +\infty[$ tels que $u < v$

De même : $f(u) - f(v) = 2(u+v-6)(v-u)$

Comme $v > 3$ et $u > 3$ alors $u+v > 6$ donc $u+v-6 > 0$;

Par hypothèse $u < v$ alors $v-u > 0$; **ainsi** $f(u) - f(v) > 0$: **f est décroissante sur** $[3; +\infty[$

e) Le maximum d'une fonction est la plus petite valeur M telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq M$

Ainsi, comme $(x-3)^2 \geq 0$, alors $-2(x-3)^2 \leq 0$ et $-2(x-3)^2 + 6 \leq 0 + 6$, soit $f(x) \leq 6$

Le maximum de f sur \mathbb{R} est 6.

f) Soit $g : x \mapsto 8x - 10$: la représentation graphique de la fonction g est une droite passant par les points $A(1; -2)$ car $g(1) = -2$ et $B(2; 6)$ car $g(2) = 6$.

Pour tracer la fonction f , il faut faire un tableau de valeurs :

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	-44	-26	-12	-2	4	6	4	-2	-12	-26	-44

La droite représentant la fonction g est tangente à la courbe représentant f au point $A(1; -2)$.

Par le calcul, il faut résoudre $f(x) = g(x)$, soit $-2(x-3)^2 + 6 = 8x - 10$

En développant : $-2(x^2 - 6x + 9) + 6 = 8x - 10$, soit : $-2x^2 + 12x - 18 + 6 - 8x + 10 = 0$

On obtient : $-2x^2 + 4x - 2 = 0$, soit : $-2(x^2 - 2x + 1) = 0$, qui s'écrit aussi : $-2(x-1)^2 = 0$

La solution est $x = 1$, et $f(1) = g(1) = -2$: on retrouve le point $A(1; -2)$