

Interrogation sur les fonctions homographiques

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x+6}{3x-12}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Montrer que la fonction f peut aussi s'écrire : $f(x) = \frac{1}{3} + \frac{10}{3x-12}$
- 3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec les deux axes.
- 4) Tracer la courbe sur votre calculatrice.
- 5) Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]4; +\infty[$.
- 6) Réaliser le tableau de variations de la fonction f .
- 7) Réaliser un tableau de valeurs de cette fonction, puis tracer sa courbe représentative.
- 8) Résoudre l'équation : $f(x) = 3$ graphiquement puis par le calcul.
- 9) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) < 1$.

Interrogation – CORRIGE – Notre Dame de La Merci - Montpellier

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x+6}{3x-12}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .

Il faut que $3x-12 \neq 0$

$$3x \neq 12$$

$$x \neq 4 \quad \text{donc} \quad D_f = \mathbb{R} / \{4\}$$

- 2) Montrer que la fonction f peut aussi s'écrire : $f(x) = \frac{1}{3} + \frac{10}{3x-12}$

$$\frac{1}{3} + \frac{10}{3x-12} = \frac{1}{3} + \frac{10}{3x-3 \times 4} = \frac{1}{3} + \frac{10}{3(x-4)} = \frac{1 \times (x-4)}{3 \times (x-4)} + \frac{10}{3(x-4)} = \frac{x-4}{3(x-4)} + \frac{10}{3(x-4)} = \frac{x+6}{3(x-4)} = f(x)$$

- 3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec les deux axes.

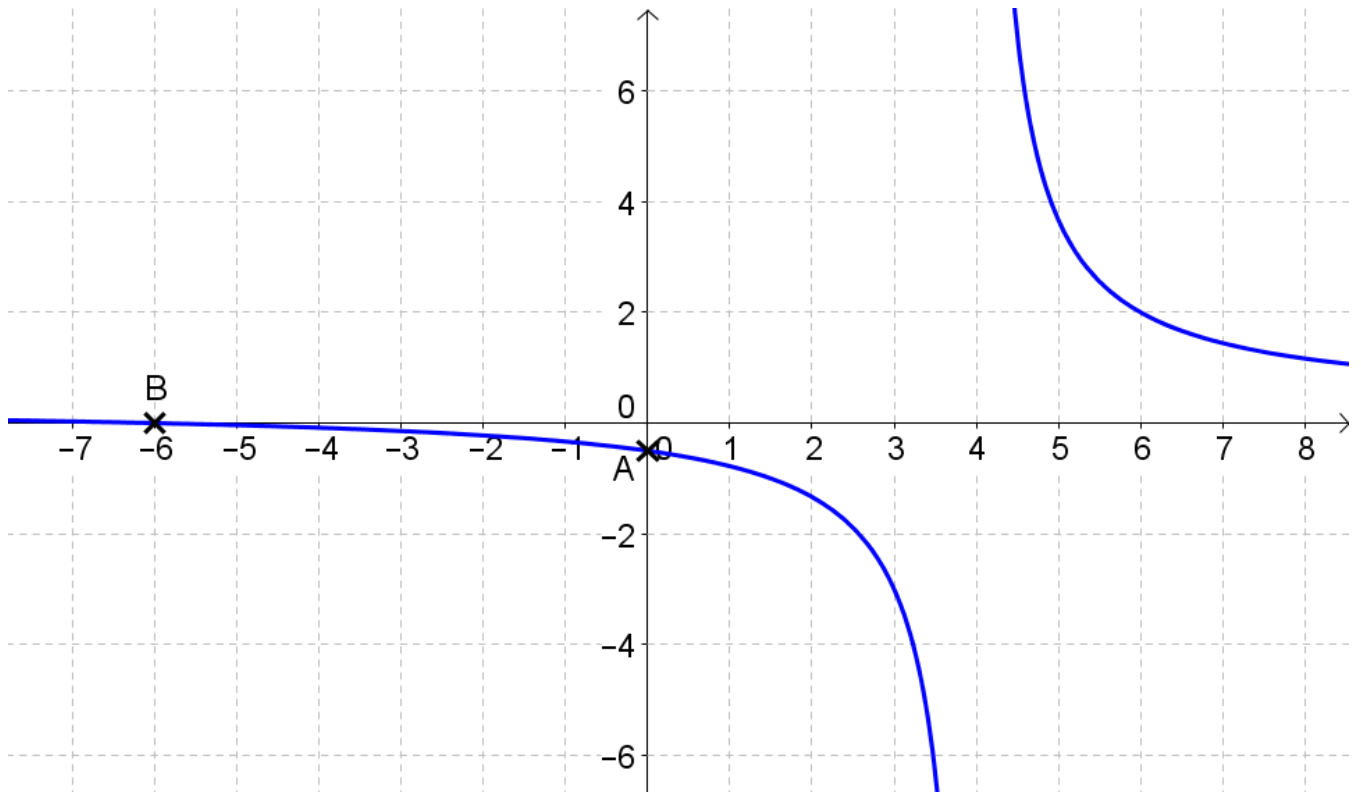
$$\text{Intersection avec l'axe (Oy)} : f(0) = \frac{1}{3} + \frac{10}{3 \times 0 - 12} = \frac{1}{3} - \frac{10}{12} = \frac{1}{3} - \frac{5}{6} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} - \frac{5}{6} = \frac{2}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

On obtient le point $A\left(0; -\frac{1}{2}\right)$

Intersection avec l'axe (Ox) : il faut résoudre $f(x) = 0$, soit : $x+6=0$, d'où : $x=-6$

On obtient le point $B(-6; 0)$

- 4) Tracer la courbe sur votre calculatrice.



- 5) Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]4; +\infty[$.

Soit $a, b \in]4; +\infty[$ tels que $a < b$:

$$f(a) - f(b) = \left(\frac{1}{3} + \frac{10}{3a-12}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{10}{3b-12}\right) = \frac{1}{3} + \frac{10}{3a-12} - \frac{1}{3} - \frac{10}{3b-12}$$

$$f(a) - f(b) = \frac{10(3b-12)}{(3a-12)(3b-12)} - \frac{10(3a-12)}{(3b-12)(3a-12)} = \frac{30b-120}{(3a-12)(3b-12)} - \frac{30a-120}{(3b-12)(3a-12)}$$

$$f(a) - f(b) = \frac{30b-30a}{(3a-12)(3b-12)} = \frac{30(b-a)}{(3a-12)(3b-12)}$$

On sait que $a < b$ donc $b - a > 0$

On sait que $a > 4$

$b > 4$

$$3a > 12$$

$$3b > 12$$

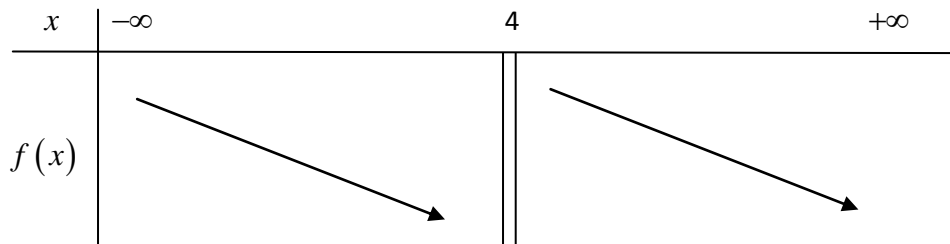
$$3a - 12 > 0$$

$$3b - 12 > 0$$

Ainsi : $f(a) - f(b) > 0$ soit $f(a) > f(b)$

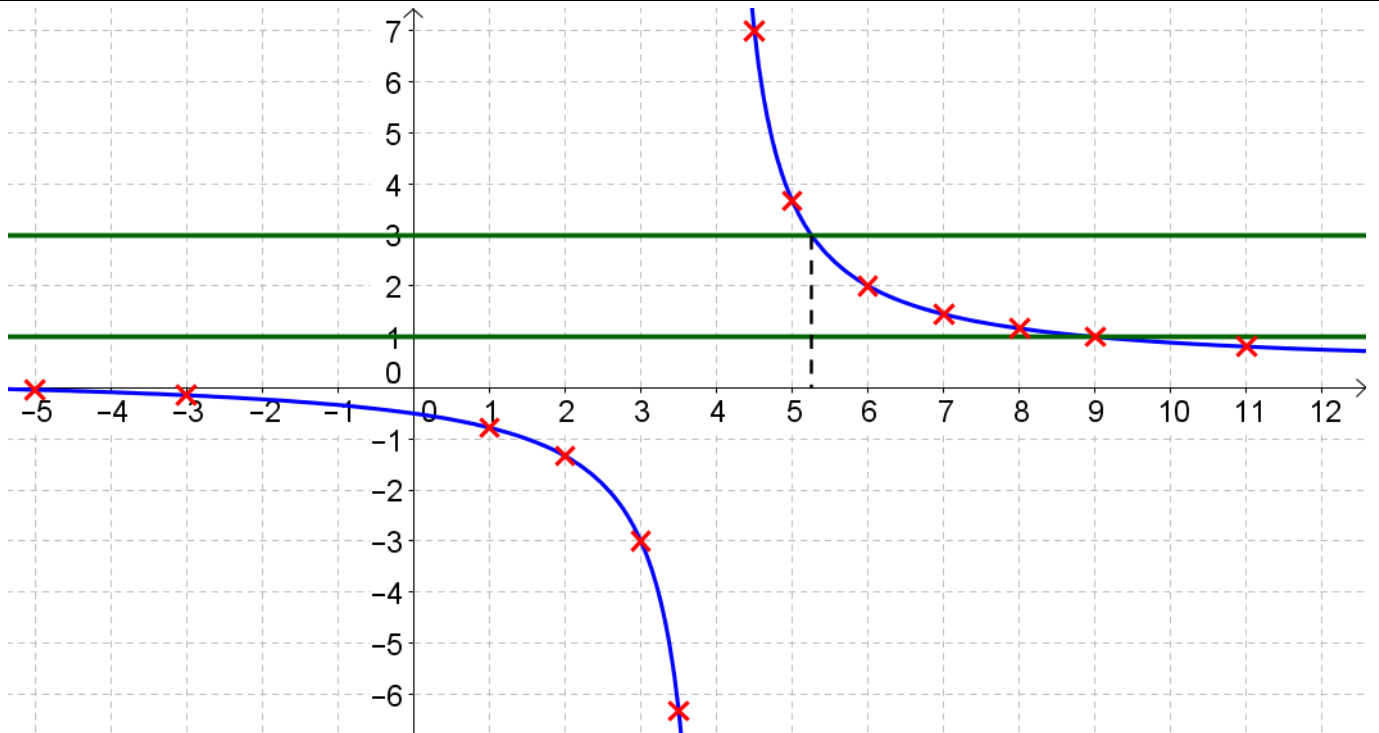
La fonction f est décroissante sur $]4; +\infty[$.

6) Réaliser le tableau de variations de la fonction f .



7) Réaliser un tableau de valeurs de cette fonction, puis tracer sa courbe représentative.

x	-5	-3	-1	1	2	3	3,5	4,5	5	6	7	9	11	13
$f(x)$	$-\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{7}{9}$	$-\frac{4}{3}$	-3	$-\frac{19}{3}$	7	$\frac{11}{3}$	2	$\frac{13}{9}$	1	$\frac{17}{21}$	$\frac{19}{27}$



8) Résoudre l'équation : $f(x) = 3$ graphiquement puis par le calcul.

Graphiquement, on constate que la courbe ne coupe qu'une seule fois la droite d'équation : $y = 3$ en un point de coordonnées $(5, 25; 0)$

Par le calcul, il faut résoudre l'équation $f(x) = 3$

$$\frac{x+6}{3x-12} = 3$$

$$x+6 = 3(3x-12)$$

$$x+6 = 9x-36$$

$$x+6-9x = -36$$

$$-8x = -36-6$$

$$x = \frac{-42}{-8}$$

$$x = \frac{\boxed{2} \times 21}{\boxed{2} \times 4}$$

$$x = \frac{21}{4} = 5,25$$

8) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) < 1$.

Graphiquement, on constate que la courbe ne coupe qu'une seule fois la droite d'équation : $y = 1$
en un point de coordonnées $(9;1)$.

D'après le tableau de variation de la fonction f , la solution de cette inéquation est :

$$S =]-\infty; 4[\cup]9; +\infty[$$