# Fiche 3 : Equations avec une racine carrée

*Une équation dans laquelle la variable apparait sous un radical est appelée une* ***équation irrationnelle***.

**<u>Exercices 3.1 :</u>**

Résoudre les équations suivantes :

a) $\sqrt{2x+10}=9$ b) $\sqrt{5-x}=11$

c) $\sqrt{x+7}=-9$ d) $\sqrt{10-4x}=0$

**<u>Exercices 3.2 :</u>**

Résoudre les équations suivantes :

a) $3\sqrt{4x-9}-15=0$ b) $\sqrt{2x+6}-\sqrt{4-x}=0$

c) $3\sqrt{x-2}=2\sqrt{-1-x}$ d) $\sqrt{\frac{15x-3}{2}}-4=0$

**<u>Exercices 3.3 :</u>**

Résoudre les équations suivantes :

a) $\sqrt{x+13}=\sqrt{x+6}+1$ b) $\sqrt{4x+9}=\sqrt{x+5}+2$

On donne : $9x^2-16x-80=9(x-4)\left(x+\frac{20}{9}\right)$.

**CORRIGE – Notre Dame de La Merci - *Montpellier***

**Exercices 3.1** Résoudre les équations suivantes :

**a)** $\sqrt{2x+10}=9$

**Domaine d'existence des solutions** :

→le contenu de chaque racine carrée doit être positif ou nul :

Il faut que $2x+10\geq 0 \iff 2x\geq -10 \iff \frac{2x}{2}\geq\frac{-10}{2} \iff x\geq -5$

**Résolution** :

$\sqrt{2x+10}=9 \iff \left(\sqrt{2x+10}\right)^2=9^2 \iff 2x+10=81 \iff 2x=81-10 \iff 2x=71$

$\iff \frac{2x}{2}=\frac{71}{2} \iff x=\frac{71}{2}$

**Vérification** : la valeur $\frac{71}{2}$ est bien supérieure ou égale à $-5$

**Solution** : $S=\left\{\frac{71}{2}\right\}$

Vérification : $\sqrt{2\times\frac{71}{2}+10}=\sqrt{71+10}=\sqrt{81}=9$

**b)** $\sqrt{5-x}=11$

**Domaine d'existence des solutions** :

→le contenu de chaque racine carrée doit être positif ou nul :

Il faut que $5-x\geq 0 \iff -x\geq -5 \iff -x\times(-1)\leq -5\times(-1) \iff x\leq 5$

**Résolution** :

$\sqrt{5-x}=11 \iff \left(\sqrt{5-x}\right)^2=11^2 \iff 5-x=121 \iff -x=121-5 \iff -x=116$

$\iff -x\times(-1)=116\times(-1) \iff x=-116$

**Vérification** : la valeur $-116$ est bien inférieure ou égale à $5$.

**Solution** : $S=\{-116\}$

Vérification : $\sqrt{5-(-116)}=\sqrt{5+116}=\sqrt{121}=11$

**c)** $\sqrt{x+7}=-9$

Le résultat d'une racine carrée est positif ou nul donc cette équation n'admet pas de solution

$S=\varnothing$

**d)** $\sqrt{10-4x}=0$

**Domaine d'existence des solutions** :

Il faut que $10-4x\geq 0 \iff -4x\geq -10 \iff \frac{-4x}{-4}\leq\frac{-10}{-4} \iff x\leq\frac{5}{2}$

**Résolution** : Si $\sqrt{X}=0$ alors $X=0$

$\sqrt{10-4x}=0 \iff 10-4x=0 \iff -4x=-10 \iff \frac{-4x}{-4}=\frac{-10}{-4} \iff x=\frac{5}{2}$

**Vérification** : la valeur $\frac{5}{2}$ est bien inférieure ou égale à $\frac{5}{2}$.

**Solution** : $S=\left\{\frac{5}{2}\right\}$

→ $\sqrt{10-4\times\frac{5}{2}}=\sqrt{10-10}=\sqrt{0}=0$

**Exercices 3.2** Résoudre les équations suivantes :

**a)** $3\sqrt{4x-9}-15=0$

**Domaine d'existence des solutions :**

Il faut que $4x-9\geq 0 \Leftrightarrow 4x\geq 9 \Leftrightarrow \frac{4x}{4}\geq\frac{9}{4} \Leftrightarrow x\geq\frac{9}{4}$

**Résolution :**
On isole la racine carrée :

$$3\sqrt{4x-9}-15=0 \Leftrightarrow 3\sqrt{4x-9}=15 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{4x-9}}{3}=\frac{15}{3} \Leftrightarrow \sqrt{4x-9}=5$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{4x-9}\right)^2=5^2 \Leftrightarrow 4x-9=25 \Leftrightarrow 4x=25+9 \Leftrightarrow 4x=34 \Leftrightarrow \frac{4x}{4}=\frac{34}{4}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{17}{2}$$

**Vérification** : la valeur $\frac{17}{2}$ est bien supérieure ou égale à $\frac{9}{4}$.

**Solution :** $S=\left\{\frac{17}{2}\right\}$

$$\rightarrow 3\sqrt{4\times\frac{17}{2}-9}-15=3\sqrt{\frac{68}{2}-9}-15=3\sqrt{34-9}-15=3\sqrt{25}-15=3\times 5-15=0$$

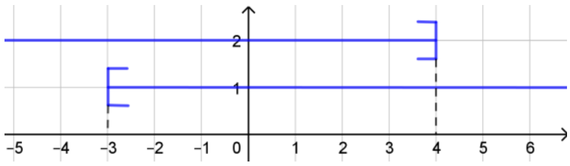
**b)** $\sqrt{2x+6}-\sqrt{4-x}=0$

**Domaine d'existence des solutions :**
→le contenu de chaque racine carrée doit être positif ou nul :

il faut que $2x+6\geq 0 \Leftrightarrow 2x\geq -6 \Leftrightarrow \frac{2x}{2}\geq\frac{-6}{2} \Leftrightarrow x\geq -3$

ET il faut que $4-x\geq 0 \Leftrightarrow -x\geq -4 \Leftrightarrow -x\times(-1)\leq -4\times(-1) \Leftrightarrow x\leq 4$

La solution doit appartenir à l'intervalle $[-3;4]$




**Résolution :**
On isole chaque racine carrée dans un membre de l'équation :

$$\sqrt{2x+6}-\sqrt{4-x}=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+6}=\sqrt{4-x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+6}\right)^2=\left(\sqrt{4-x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x+6=4-x \Leftrightarrow 2x+6+x=4 \Leftrightarrow 3x=4-6 \Leftrightarrow 3x=-2 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$$

**Vérification** : la valeur $-\frac{2}{3}$ appartient à l'intervalle $[-3;4]$.

**Solution :** $S=\left\{-\frac{2}{3}\right\}$

$$\rightarrow \sqrt{2\times\left(-\frac{2}{3}\right)+6}=\sqrt{-\frac{4}{3}+6}=\sqrt{-\frac{4}{3}+\frac{18}{3}}=\sqrt{\frac{14}{3}}$$

et $\sqrt{4-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\sqrt{4+\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{12}{3}+\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{14}{3}}$ : les deux membres sont bien égaux

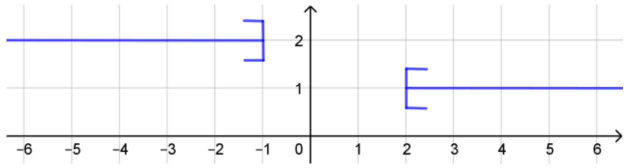
**c)** $3\sqrt{x-2}=2\sqrt{-1-x}$

**Domaine d'existence des solutions** :

→le contenu de chaque racine carrée doit être positif ou nul :

Il faut que $x-2\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\geq 2$

ET il faut que $-1-x\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad -x\geq 1 \quad\Leftrightarrow\quad -x\times(-1)\leq 1\times(-1) \quad\Leftrightarrow\quad x\leq -1$



Ces deux intervalles sont disjoints, aucune valeur ne peut faire vivre les deux racines carrées en même temps.

Cette équation n'admet pas de solution.

**d)** $\sqrt{\dfrac{15x-3}{2}}-4=0$

**Domaine d'existence des solutions** :

Il faut que $\dfrac{15x-3}{2}\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 15x-3\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 15x\geq 3 \quad\Leftrightarrow\quad x\geq\dfrac{3}{15} \quad\Leftrightarrow\quad x\geq\dfrac{1}{5}$

**Résolution** :

$$\sqrt{\frac{15x-3}{2}}-4=0 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{\frac{15x-3}{2}}=4 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\sqrt{\frac{15x-3}{2}}\right)^2=4^2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{15x-3}{2}=16$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{15x-3}{2}\times 2=16\times 2 \quad\Leftrightarrow\quad 15x-3=32 \quad\Leftrightarrow\quad 15x=32+3 \quad\Leftrightarrow\quad 15x=35 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{15x}{15}=\frac{35}{15}$$

$$\Leftrightarrow\quad x=\frac{7}{3}$$

**Vérification** : la valeur $\dfrac{7}{3}$ est bien supérieure ou égale à $\dfrac{1}{5}$.

**Solution** : $S=\left\{\dfrac{7}{3}\right\}$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{15\times\frac{7}{3}-3}{2}}-4=\sqrt{\frac{35-3}{2}}-4=\sqrt{\frac{32}{2}}-4=\sqrt{16}-4=4-4=0$$

## Exercices 3.3 :

**a)** $\sqrt{x+13}=\sqrt{x+6}+1$

**Domaine d'existence des solutions** :

Il faut que $x+13\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\geq -13$

ET il faut que $x+6\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\geq -6$

La solution doit appartenir à l'intervalle $D_E=[-6;+\infty[$

**Résolution** :

$$\sqrt{x+13}=\sqrt{x+6}+1 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\sqrt{x+13}\right)^2=\left(\sqrt{x+6}+1\right)^2 \quad\Leftrightarrow\quad x+13=\left(\sqrt{x+6}\right)^2+2\times\sqrt{x+6}\times 1+1^2$$

$$\Leftrightarrow\quad x+13=x+6+2\sqrt{x+6}+1 \quad\Leftrightarrow\quad 13-7=2\sqrt{x+6} \quad\Leftrightarrow\quad 6=2\sqrt{x+6} \quad\Leftrightarrow\quad 3=\sqrt{x+6}$$

$$\Leftrightarrow\quad 3^2=\left(\sqrt{x+6}\right)^2 \quad\Leftrightarrow\quad 9=x+6 \quad\Leftrightarrow\quad 9-6=x \quad\Leftrightarrow\quad 3=x$$

**Vérification** : $3\in D_E$

**Solution** : $S=\{3\}$

**b)** $\sqrt{4x+9}=\sqrt{x+5}+2$

**Domaine d'existence des solutions** :

Il faut que $4x+9\geq 0 \Leftrightarrow 4x\geq -9 \Leftrightarrow x\geq -\frac{9}{4}$ ET il faut que $x+5\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -5$

La solution doit appartenir à l'intervalle $D_E=\left[-\frac{9}{4};+\infty\right[$

**Résolution** :

$$\sqrt{4x+9}=\sqrt{x+5}+2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{4x+9}\right)^2=\left(\sqrt{x+5}+2\right)^2 \Leftrightarrow 4x+9=\left(\sqrt{x+5}\right)^2+2\times\sqrt{x+5}\times 2+2^2$$

$$\Leftrightarrow 4x+9=x+5+4\sqrt{x+5}+4 \Leftrightarrow 4x+9-x-9=4\sqrt{x+5} \Leftrightarrow 3x=4\sqrt{x+5}$$

$$\Leftrightarrow (3x)^2=\left(4\sqrt{x+5}\right)^2 \Leftrightarrow 9x^2=16\left(\sqrt{x+5}\right)^2 \Leftrightarrow 9x^2=16(x+5) \Leftrightarrow 9x^2=16x+80$$

$$\Leftrightarrow 9x^2-16x-80=0 \Leftrightarrow 9(x-4)\left(x+\frac{20}{9}\right)=0$$

On obtient deux solutions : $x=4$ ou $x=-\frac{20}{9}$

**Vérification** : $4\in D_E$ et $-\frac{20}{9}\in D_E$

**Solution** : $S=\left\{-\frac{20}{9};4\right\}$

**Culture générale** : passage de $9x^2-16x-80=0$ à $9(x-4)\left(x+\frac{20}{9}\right)=0$ :

$$9x^2-16x-80=0 \Leftrightarrow 9\left(x^2-\frac{16}{9}x-\frac{80}{9}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 9\left(x^2-2\times x\times\frac{8}{9}-\frac{80}{9}\right)=0 \rightarrow a^2-2ab+b^2$$

$$\Leftrightarrow 9\left(x^2-2\times x\times\frac{8}{9}+\left(\frac{8}{9}\right)^2-\left(\frac{8}{9}\right)^2-\frac{80}{9}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 9\left(\left[x^2-2\times x\times\frac{8}{9}+\left(\frac{8}{9}\right)^2\right]-\left(\frac{8}{9}\right)^2-\frac{80}{9}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 9\left(\left(x-\frac{8}{9}\right)^2-\frac{64}{81}-\frac{80}{9}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 9\left(\left(x-\frac{8}{9}\right)^2-\frac{64}{81}-\frac{720}{81}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 9\left(\left(x-\frac{8}{9}\right)^2-\frac{784}{81}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 9\left(\left(x-\frac{8}{9}\right)^2-\left(\frac{28}{9}\right)^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 9\left(\left(x-\frac{8}{9}\right)^2-\frac{64}{81}-\frac{720}{81}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9\left(\left(x-\frac{8}{9}\right)^2-\frac{784}{81}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9\left(\left(x-\frac{8}{9}\right)^2-\left(\frac{28}{9}\right)^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9\left(x-\frac{8}{9}+\frac{28}{9}\right)\left(x-\frac{8}{9}-\frac{28}{9}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9\left(x+\frac{20}{9}\right)\left(x-\frac{36}{9}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9\left(x+\frac{20}{9}\right)(x-4)=0$$