Exercices d'arithmétique

Exercice 1

- 10 est-il multiple de 4 ?
- 5 est-il diviseur de 25 ?
- 252 est-il multiple de 9 ?
- 18 est-il diviseur de 9 ?
- Quel est l'ensemble des multiples de 5 ?
- Quel est l'ensemble des diviseurs de 48 ?
- Soit n un entier naturel. 0 est-il un multiple de n ?
- Soit n un entier naturel non nul. 0 est-il diviseur de n ?

Exercice 2

- Vrai ou faux (justifié) : si a est multiple de b et a est multiple de c, alors, a est multiple de $b + c$.
- Vrai ou faux (justifié) : si c est diviseur de a, si b est diviseur de a et si $c \geq b$, alors, $c-b$ est diviseur de a.
- Vrai ou faux (justifié) : on peut trouver un multiple de 14 qui ne soit pas un multiple de 7.
- Vrai ou faux (justifié) : je connais un diviseur de 24 qui ne soit pas un diviseur de 12, ni 24, lui-même.
- Vrai ou faux (justifié) : on peut trouver un multiple de 7 qui ne soit ni un multiple de 14, ni un multiple de 21, ni le nombre 7, lui-même.
- Vrai ou faux (justifié) : je connais un diviseur de 124 qui ne soit pas un diviseur de 248.

Exercice 3

Soit n un entier naturel. Démontrer que :

1. $6 \times n + 9$ est multiple de 3 ;
2. $(n+2)^2 - n^2$ est multiple de 4 ;
3. $(n+2)^2 - (n-2)^2$ est multiple de 8.

Exercice 4

Un groupe de majorettes étudie une disposition pour défiler. Elles décident de se placer en rangées pour former un rectangle.
Elles remarquent que :

- quand elles se placent par rangées de six, il en reste trois non placées,
- quand elles se placent par rangées de cinq, elles sont toutes placées.

1. Si elles se placent par rangées de trois, en reste-t-il ? Justifiez.
2. Si elles se placent par rangées de deux, en reste-t-il ? Justifiez.
3. Dans cette question uniquement, on fait l'hypothèse qu'il y a en tout moins de cinquante majorettes. Quel peut être le nombre de majorettes ? Donnez toutes les solutions.

Exercice 5 Besançon (1998)

Quels sont les entiers naturels a et b tels que $a^2 - b^2 = 255$?

Exercice 6 Créteil, Paris, Versailles (2004)

Sachant que

$$36\ 202\ 744 = 9\ 658 \times 3\ 748 + 4\ 560,$$

donner le quotient de la division euclidienne de $36\ 202\ 744$ par $3\ 748$.

Exercice 7

Compléter les • par des chiffres en convenant qu'un chiffre situé en première position est non nul.

$$\begin{array}{rcccc|cc}
 & \bullet & \bullet & 7 & 6 & 3 & 6 \\
\cline{6-7}
- & 3 & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\
\cline{1-5}
 & & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
 & - & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
\cline{1-5}
 & & & 2 & \bullet & &
\end{array}$$

Indiquer toutes les manières possibles pour compléter ces •.

Exercice 8 Reims, Strasbourg (1999)

Vous comptez de 7 en 7, à partir de 38, jusqu'au plus grand nombre inférieur ou égal à 365.

1. Quel est le dernier nombre atteint ?
2. Combien y a-t-il de nombres atteints (38 y compris) ?
3. Par quels nombres puis-je remplacer 365 sans modifier les deux réponses précédentes ?

Exercice 9

Soit a un entier naturel. Dans la division euclidienne de a par 7, on obtient un quotient double du reste. Quelles sont les valeurs de a possibles ?

Exercice 10

Quel est le plus petit entier naturel qui possède exactement 15 diviseurs ?

Exercice 11 Amiens (2003)

Je suis un nombre à trois chiffres qui possède exactement trois diviseurs.
La somme de mes chiffres est de treize. Qui suis-je ?

Exercice 12 Bordeaux, Caen, Clermont, Nantes, Orléans-Tours, Poiriers, La Réunion (2000)

Le service des espaces verts veut border un espace rectangulaire de 924 *m* de long sur 728 *m* de large, à l'aide d'arbustes régulièrement espacés. Un arbuste sera planté à chaque angle du terrain. La distance entre deux arbustes doit être un nombre entier de mètres.

1. Déterminer toutes les valeurs possibles de la distance entre deux arbustes.
2. Déterminer, dans chaque cas, le nombre d'arbustes nécessaires à la plantation.

Exercice 13

Pour son anniversaire, Charlie a reçu des timbres.

- Il y en avait moins de 200.
- Si on les répartit en tas de 2, il n'en reste pas.
- Si on les répartit en tas de 8, il n'en reste toujours pas.
- Si on les répartit en tas de 14, il n'en reste pas, non plus.
- Mais si on les répartit en tas de 5, il en reste 3.

Combien de timbres Charlie a-t-il reçus pour son anniversaire ?

CORRIGE du net (améliorés)

Solution 1

- Non, $10 = 2,5 \times 4$, mais $2,5$ n'est pas un entier naturel.
- Oui, car $25 = 5 \times 5$, et 5 est bien un entier naturel.
- Oui, car $252 = 28 \times 9$ et 28 est bien un entier naturel.
- Non, car $9 = \frac{1}{2} \times 18$ et $\frac{1}{2}$ n'est pas un entier naturel.
- 0, 5, 10, 15, 20, . . . Cet ensemble est de cardinal infini.
- 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, et 48. Cet ensemble est de cardinal fini.
- Oui, car $0 = 0 \times n$.
- Non, car $0 \times k = 0 \neq n$.

Solution 2

- Faux ! 21 est multiple de 3 et de 7, mais pas de 3 + 7 = 10.
- Faux ! 7 et 3 sont des diviseurs de 21, mais pas 7 − 3 = 4.
- Faux ! D'après la propriété de transitivité, comme 14 est multiple de 7, tout multiple de 14, l'est de 7.
- Vrai ! 8.
- Vrai ! Par exemple, 35, 49, . . .
- Faux ! D'après la propriété de transitivité, comme 124 est diviseur de 248, tout diviseur de 124, l'est de 248.

Solution 3

1. $6\times n+9=(2\times n+3)\times 3$ est multiple de 3 car 3 est en facteur dans $6\times n+9$;

2. $(n+2)^2-n^2=n^2+4n+4-n^2=4\times(n+1)$ est multiple de 4 car 4 est en facteur dans $(n+2)^2-n^2$;

Ou : $(n+2)^2-n^2=(n+2+n)(n+2-n)=(2n+2)\times 2=2(n+1)\times 2=4(n+1)$

3. $(n+2)^2-(n-2)^2=n^2+4n+4-(n^2-4n+4)=n^2+4n+4-n^2+4n-4=8\times n$ est multiple de 8 car 8 est en facteur dans $(n+2)^2-(n-2)^2$.

Ou :
$$\begin{aligned}(n+2)^2-(n-2)^2&=(n+2+(n-2))(n+2-(n-2))\\&=(n+2+n-2)(n+2-n+2)\\&=2n\times 4\\&=8n\end{aligned}$$

Solution 4

1. Quand elles se placent par rangées de 6, il en reste 3 non placées. Chacune des rangées de 6 constitue deux rangées de 3 ; les 3 non placées constituent maintenant une rangée de 3. Il n'en reste donc pas.
   <u>Solution algébrique</u>. D'après la première hypothèse, il y a $6\times k+3$ majorettes $(\text{avec } k\in\mathbb{N})$. Or $6\times k+3=3\times(2\times k+1)$ est multiple de 3. Par rangées de 3, elles seront donc toutes placées.
2. Quand elles se placent par rangées de 6, il en reste 3 non placées. Chacune des rangées de 6 constitue trois rangées de 2 ; les 3 non placées constituent maintenant une rangée de 2, mais il en reste 1. Il en reste donc une.
   <u>Solution algébrique</u>. D'après la première hypothèse, il y a $6\times k+3$ majorettes $(\text{avec } k\in\mathbb{N})$. Or $6\times k+3=2\times(3\times k+1)+1$ n'est pas multiple de 2. Par rangées de 2, il en reste donc une non placée.
3. D'après la première hypothèse, il y a $6\times k+3$ majorettes $(\text{avec } k\in\mathbb{N})$, soit 3, 9, 15, 21, 27, 33, 39 ou 45 majorettes, puisqu'il y a moins de cinquante majorettes. Parmi ces possibilités, d'après la deuxième hypothèse, il ne reste que 15 ou 45.
   Conclusion : les majorettes sont au nombre de 15 ou de 45.

Solution 5

De $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, comme $a^2 - b^2 > 0$ et $a+b > 0$, on déduit que $a-b>0 \Leftrightarrow a>b$.
D'autre part, de $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ et comme a et b sont des entiers naturels, on déduit aussi que $a-b$ (qui est positif d'après la remarque précédente) et $a+b$ sont aussi des entiers naturels.
De $a^2 - b^2 = 255$, on déduit que 255 s'écrit donc comme produit de deux entiers naturels (à savoir, comme produit de $a-b$ par $a+b$ avec $a-b < a+b$).
Cependant, on ne peut écrire 255 comme produit de deux entiers naturels que de quatre façons quand on impose que le facteur de gauche est inférieur au facteur de droite et chacune de ces façons nous fournit une solution :

1. Première façon : $255 = 1 \times 255$
   On déduit alors le système d'équations suivant :
   $$\begin{cases} a-b=1 & (L_1) \\ a+b=255 & (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=1 & (L_1) \\ 2b=254 & (L_2)-(L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{254}{2}=127 \\ a=1+b=1+127=128 \end{cases}$$
   → Première solution : a = 128 et b = 127.
2. Deuxième façon : $255 = 3 \times 85$
   On déduit alors le système d'équations suivant :
   $$\begin{cases} a-b=3 & (L_1) \\ a+b=85 & (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=3 & (L_1) \\ 2b=82 & (L_2)-(L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{82}{2}=41 \\ a=3+b=3+41=44 \end{cases}$$
   → Deuxième solution : a = 44 et b = 41.
3. Troisième façon : $255 = 5 \times 51$
   On déduit alors le système d'équations suivant :
   $$\begin{cases} a-b=5 & (L_1) \\ a+b=51 & (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=51 & (L_1) \\ 2b=46 & (L_2)-(L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{46}{2}=23 \\ a=5+b=5+23=28 \end{cases}$$
   → Troisième solution : a = 28 et b = 23.
4. Quatrième façon : $255 = 15 \times 17$
   On déduit alors le système d'équations suivant :
   $$\begin{cases} a-b=15 & (L_1) \\ a+b=17 & (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=15 & (L_1) \\ 2b=2 & (L_2)-(L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{2}{2}=1 \\ a=15+b=15+1=16 \end{cases}$$
   → Quatrième solution : a = 16 et b = 1.

Solution 6

On peut écrire
$$36\ 202\ 744 = 3\ 748 \times 9\ 658 + (3\ 748 + 812) = 3\ 748 \times 9\ 659 + 812$$
Le quotient de la division euclidienne de $36\ 202\ 744$ par $3\ 748$ vaut donc $9\ 659$ et le reste 812
→on a bien $812 < 3\ 748$.

Solution 7

La table des 36 est :
1 × 36 = 36 ; 2 × 36 = 72 ; 3 × 36 = 108 ; 4 × 36 = 144 ; 5 × 36 = 180 ;
6 × 36 = 216 ; 7 × 36 = 252 ; 8 × 36 = 288 ; 9 × 36 = 324.
Comme le seul élément de la table de 36 dont le premier chiffre est un 3 est 324 = 9 × 36, le nombre en deuxième ligne à gauche de la potence est 324 et le premier chiffre du quotient est 9.
On complète la potence :

$$\begin{array}{rrrr|rr} & \bullet & \bullet & 7 \; 6 & 3 & 6 \\ \cline{5-6} - & 3 & 2 & 4 & 9 & \bullet \\ \cline{1-4} & & \bullet & \bullet \; \bullet & & \\ & - & \bullet & \bullet \; \bullet & & \\ \cline{1-4} & & & 2 \; \bullet & & \end{array}$$

En troisième ligne à gauche de la potence, le 6 de la première ligne est abaissé et le chiffre des unités de • • 7 − 324 est 3.

$$\begin{array}{rrrr|rr} & \bullet & \bullet & 7 \; 6 & 3 & 6 \\ \cline{5-6} - & 3 & 2 & 4 & 9 & \bullet \\ \cline{1-4} & & \bullet & 3 \; 6 & & \\ & - & \bullet & \bullet \; \bullet & & \\ \cline{1-4} & & & 2 \; \bullet & & \end{array}$$

Toujours en troisième ligne à gauche de la potence, le nombre •3 (obtenu par • • 7 – 324, avant d'abaisser le 6) est un reste partiel (inférieur au diviseur) et est donc compris entre 0 (inclus) et 36 (exclu).
En tenant compte aussi du fait qu'"un chiffre situé en première position est non nul", en troisième ligne à gauche de la potence, le nombre •3 (obtenu par • • 7 − 324) ne peut être que 13, 23 ou 33.

<u>Premier cas</u> : en troisième ligne à gauche de la potence, le nombre •3 (obtenu par • • 7 − 324) est 13.
On complète alors d'abord la première ligne à gauche de la potence : comme ••7−324 = 13, ••7 = 337.
Ensuite, comme 136 = 3×36+28 = 108+28, le nombre en quatrième ligne à gauche de la potence est 108, le nombre en cinquième ligne à gauche de la potence est 28 et le deuxième chiffre du quotient est 3.

$$\begin{array}{rrrrr|rr} & 3 & 3 & 7 & 6 & 3 & 6 \\ \cline{6-7} - & 3 & 2 & 4 & & 9 & 3 \\ \cline{1-5} & & 1 & 3 & 6 & & \\ & - & 1 & 0 & 8 & & \\ \cline{1-5} & & & 2 & 8 & & \end{array}$$

<u>Deuxième cas</u> : en troisième ligne à gauche de la potence, le nombre •3 (obtenu par • • 7−324) est 23.
On complète alors d'abord la première ligne à gauche de la potence : comme ••7−324 = 23, ••7 = 347.
Ensuite, comme 236 = 6×36+28 = 216+20, le nombre en quatrième ligne à gauche de la potence est 216, le nombre en cinquième ligne à gauche de la potence est 20 et le deuxième chiffre du quotient est 6.

$$\begin{array}{rrrrr|rr} & 3 & 4 & 7 & 6 & 3 & 6 \\ \cline{6-7} - & 3 & 2 & 4 & & 9 & 6 \\ \cline{1-5} & & 2 & 3 & 6 & & \\ & - & 2 & 1 & 6 & & \\ \cline{1-5} & & & 2 & 0 & & \end{array}$$

<u>Troisième cas</u> : en troisième ligne à gauche de la potence, le nombre •3 (obtenu par • • 7−324) est 33.
On complète alors d'abord la première ligne à gauche de la potence : comme ••7−324 = 33, ••7 = 357.
Ensuite, comme $336 = 9\times36+12 = 324+12$, le nombre en quatrième ligne à gauche de la potence est 324, le nombre en cinquième ligne à gauche de la potence est 12 et le deuxième chiffre du quotient est 9.
Cependant, le nombre en cinquième ligne à gauche de la potence a 2 comme premier chiffre et il est donc impossible que ce soit 12.
Ce troisième cas ne fournit pas de solution.

Solution 8

Les nombres visités sont de la forme $38+7\times k$ avec k entier naturel.

1. Le dernier nombre visité est donc celui associé à la plus grande valeur de k et tel que :

$$38+7\times k \le 365 \iff 7\times k \le 365-38 \iff k \le \frac{365-38}{7} \iff k \le 46{,}7$$

Comme k est entier naturel, c'est celui associé à k = 46 et c'est donc $38+7\times46=360$.

2. Le premier nombre visité correspond à $k = 0$, le deuxième nombre visité correspond à $k = 1, \ldots$, et le quarante-septième correspond à $k = 46$. Il y a 47 nombres atteints.
3. On veut donc que le dernier nombre atteint soit toujours 360 et que 47 nombres soient atteints. Tant que l'on permet d'atteindre le quarante-septième visité qui est 360 et qu'on interdit de visiter un quarante-huitième qui serait 367, on ne modifie pas les réponses précédentes, on peut donc modifier le 365 en 360, 361, 362, 363, 364, 365 ou 366, mais pas 367 car sinon, on visiterait un quarante-huitième nombre qui serait 367.

Solution 9

On écrit

$$a = 7\times(2\times r)+r = 15r \text{ avec } 0 \le r < 7.$$

Chacune des valeurs de r fournit une valeur de a :

quand $r = 0$, $a = 0$; quand $r = 1$, $a = 15$; quand $r = 2$, $a = 30$; quand $r = 3$, $a = 45$;
quand $r = 4$, $a = 60$; quand $r = 5$, $a = 75$; quand $r = 6$, $a = 90$.

Solution 10

15 est un nombre impair donc on recherche un carré parfait.
Un travail rapide mène à 144, plus petit nombre possédant exactement 15 diviseurs.

Solution 11

Le nombre de diviseurs est impair donc le nombre cherché est un carré parfait.
Il n'a que trois diviseurs : 1, lui-même, et un troisième nombre qui est forcément un nombre premier : nous cherchons donc le carré d'un nombre premier ; de plus, nous cherchons un nombre compris entre 100 (inclus) et 999 (inclus). Le nombre cherché est donc impair.
Les possibilités sont :

$$11^2 = 121 \text{ , } 13^2 = 169 \text{ , } 17^2 = 289 \text{ , } 19^2 = 361 \text{ , } 23^2 = 529 \text{ , } 29^2 = 841 \text{ , } 31^2 = 961.$$

Le seul nombre dont la somme des chiffres est égale à treize est 841.

Solution 12

Soit d mètres la distance séparant deux arbustes $(d \in \mathbb{N})$. Soit m le nombre d'arbustes situés sur le côté de 924 mètres (incluant les deux arbustes de coin) et n le nombre d'arbustes situés sur le côté de 728 mètres (incluant les deux arbustes de coin). On a alors $924 = d\times(m-1)$ et $728 = d\times(n-1)$.
Ainsi, d est un diviseur commun à 924 et 728.
Or les diviseurs communs à 924 et 728 sont les diviseurs du $PGCD(924;728)$:
Par soustractions successives, on obtient :

$$924 = 728\times1+196$$
$$728 = 196\times3+140$$
$$196 = 140\times1+56$$
$$140 = 56\times2+28$$
$$56 = 28\times2+0$$

Donc le PGCD de 927 et 728 est 28.
Or les diviseurs de 28 sont : 1 , 2 , 4 , 7 , 14 , 28.
La distance d est donc de 1 mètre, de 2 mètres, de 4 mètres, de 7 mètres, de 14 mètres, ou de 28 mètres.

Distance entre deux arbustes (en m)	$m = \frac{924}{d}+1$	$n = \frac{728}{d}+1$	Nombre d'arbustes : $m\times n$
1	925	729	674 325
2	463	365	168 995
4	232	183	42 456
7	133	105	13 965
14	67	53	3 551
28	34	27	918

Solution 13

Soit n le nombre de timbres que possède Charlie.

"Si on les répartit en tas de 2, il n'en reste pas", donc n est un multiple de 2.

"Si on les répartit en tas de 8, il n'en reste pas", donc n est un multiple de 8.

"Si on les répartit en tas de 14, il n'en reste pas", donc n est un multiple de 14.

Ainsi, n est un multiple de $8 = 2^3$ et de $14 = 2 \times 7$, il est donc multiple de $2^3 \times 7 = 56$.

On cherche les multiples de 56 inférieurs à 200 (car "il y en avait moins de 200") :

0, 56, 112 et 168.

On regarde enfin ce qu'il reste quand on les répartit en tas de 5 et d'après le dernier renseignement, il doit rester 3 (car "si on les répartit en tas de 5, il en reste 3") :

$0 = 0 \times 5 + 0$ → 0 ne convient pas.

$56 = 11 \times 5 + 1$ → 56 ne convient pas.

$112 = 22 \times 5 + 2$ → 112 ne convient pas.

$168 = 33 \times 5 + 3$ → 168 convient.

Conclusion : Charlie possède 168 timbres.