Bilan sur les racines carrées

Exercice 7C.1 Simplifier les écritures suivantes

$A=\sqrt{28}\times\sqrt{20}\times\sqrt{35}$ $\quad$ $B=\sqrt{15}\times\sqrt{35}\times\sqrt{33}$ $\quad$ $C=\dfrac{\sqrt{56}}{\sqrt{21}}$

$D=\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{54}}$ $\quad$ $E=\sqrt{\dfrac{42}{25}}\times\sqrt{\dfrac{40}{28}}$ $\quad$ $F=\sqrt{\dfrac{14}{15}}\times\sqrt{\dfrac{45}{24}}\times\sqrt{\dfrac{20}{9}}$

Exercice 7C.2 Simplifier les écritures suivantes

$A=\sqrt{28}+\sqrt{63}$ $\quad$ $B=\sqrt{20}-\sqrt{45}$

$C=\sqrt{6}+\sqrt{24}+\sqrt{54}$ $\quad$ $D=4\sqrt{6}+3\sqrt{24}-5\sqrt{54}$

$E=3\sqrt{8}+5\sqrt{72}-4\sqrt{128}$ $\quad$ $F=9\sqrt{20}-5\sqrt{45}-2\sqrt{180}$

Exercice 7C.3 Simplifier les écritures suivantes

$A=\left(3\sqrt{7}-5\right)\left(2-4\sqrt{7}\right)$ $\quad$ $B=\sqrt{180}+3\sqrt{80}-2\sqrt{125}$

Exercice 7C.4 Simplifier les écritures suivantes

$A=\dfrac{5}{3+\sqrt{2}}$ $\quad$ $B=\dfrac{5}{\sqrt{7}-4}$

$C=\dfrac{3+\sqrt{2}}{4+\sqrt{8}}$ $\quad$ $D=\dfrac{8+\sqrt{8}}{8}$

Exercice 7C.5 : Voici une formule imaginaire : $R=4\pi\sqrt{\dfrac{10}{P}}$

Quelle doit être la pression P sachant que la résistance R est égale à 12 ?

Exercice 7C.6 :

Voici une formule imaginaire : $S=2\pi\times B\sqrt{\dfrac{4\times C}{3\times R}}$

Quelle doit être la valeur du respect R sachant que le bonheur B est égal à 70, la sérénité S est égale à 900 et la chance C est égale à 22. Arrondir à l'entier le plus proche. Justifier votre réponse.

Exercice 7C.7 : Voici une formule imaginaire : $S=2B\sqrt{\dfrac{7C}{2\pi R}}$

Quelle doit être la valeur du respect R sachant que le bonheur B est égal à 88, la sérénité S est égale à 777 et la chance C est égale à 22. Arrondir à l'entier le plus proche. Justifier votre réponse.

Exercice 7C.8 : Qui est le plus grand entre $11\sqrt{12}$ et $12\sqrt{11}$?

Exercice 7C.9 : Calculer $\sqrt{3^{99}+3^{99}+3^{99}}$.

Exercice 7C.10 : Simplifier $\sqrt{11-4\sqrt{7}}$.

Exercice 7C.11 : Simplifier $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{16}}$.

CORRIGE - Notre Dame de La Merci – *Montpellier – M. Quet*

Exercice 7C.1

$$A=\sqrt{28}\times\sqrt{20}\times\sqrt{35}=\sqrt{7}\times\sqrt{4}\times\sqrt{4}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{7}=\left(\sqrt{4}\times\sqrt{4}\right)\times\left(\sqrt{5}\times\sqrt{5}\right)\times\left(\sqrt{7}\times\sqrt{7}\right)=4\times5\times7=140$$

$$B=\sqrt{15}\times\sqrt{35}\times\sqrt{33}=\sqrt{5}\times\sqrt{3}\times\sqrt{7}\times\sqrt{5}\times\sqrt{3}\times\sqrt{11}=\left(\sqrt{3}\times\sqrt{3}\right)\times\left(\sqrt{5}\times\sqrt{5}\right)\times\sqrt{7}\times\sqrt{11}=3\times5\times\sqrt{77}=15\sqrt{77}$$

$$C=\frac{\sqrt{56}}{\sqrt{21}}=\sqrt{\frac{56}{21}}=\sqrt{\frac{8\times\boxed{7}}{3\times\boxed{7}}}=\sqrt{\frac{8}{3}}=\sqrt{\frac{4\times2}{3}}=\sqrt{4}\times\sqrt{\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}=2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2\frac{\sqrt{2\times3}}{3}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$$

$$D=\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{54}}=\sqrt{\frac{24}{54}}=\sqrt{\frac{3\times8}{9\times6}}=\sqrt{\frac{\boxed{3}\times\boxed{2}\times4}{3\times\boxed{3}\times\boxed{2}\times3}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$$

$$E=\sqrt{\frac{42}{25}}\times\sqrt{\frac{40}{28}}=\sqrt{\frac{42}{25}\times\frac{40}{28}}=\sqrt{\frac{42\times40}{25\times28}}=\sqrt{\frac{\boxed{7}\times6\times8\times\boxed{5}}{5\times\boxed{5}\times\boxed{7}\times4}}=\sqrt{\frac{2\times3\times2\times\boxed{4}}{5\times\boxed{4}}}=\sqrt{\frac{4\times3}{5}}=\sqrt{4}\times\sqrt{\frac{3}{5}}=2\sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$F=\sqrt{\frac{14}{15}}\times\sqrt{\frac{45}{24}}\times\sqrt{\frac{20}{9}}=\sqrt{\frac{14\times45\times20}{15\times24\times9}}=\sqrt{\frac{2\times7\times\boxed{9}\times\boxed{5}\times5\times4}{3\times\boxed{5}\times8\times3\times\boxed{9}}}=\sqrt{\frac{\boxed{8}\times7\times5}{3\times\boxed{8}\times3}}=\sqrt{\frac{35}{9}}=\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{35}}{3}$$

Exercice 7C.2

$$\begin{aligned}A&=\sqrt{28}+\sqrt{63}\\&=\sqrt{4\times7}+\sqrt{9\times7}\\&=\sqrt{4}\times\sqrt{7}+\sqrt{9}\times\sqrt{7}\\&=2\sqrt{7}+3\sqrt{7}\\&=(2+3)\sqrt{7}\\&=5\sqrt{7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B&=\sqrt{20}-\sqrt{45}\\&=\sqrt{4\times5}-\sqrt{9\times5}\\&=\sqrt{4}\times\sqrt{5}-\sqrt{9}\times\sqrt{5}\\&=2\sqrt{5}-3\sqrt{5}\\&=(2-3)\sqrt{5}\\&=-\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C&=\sqrt{6}+\sqrt{24}+\sqrt{54}\\&=\sqrt{6}+\sqrt{4\times6}+\sqrt{9\times6}\\&=\sqrt{6}+\sqrt{4}\times\sqrt{6}+\sqrt{9}\times\sqrt{6}\\&=1\times\sqrt{6}+2\times\sqrt{6}+3\times\sqrt{6}\\&=(1+2+3)\times\sqrt{6}\\&=6\sqrt{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D&=4\sqrt{6}+3\sqrt{24}-5\sqrt{54}\\&=4\sqrt{6}+3\times\sqrt{4\times6}-5\times\sqrt{9\times6}\\&=4\sqrt{6}+3\times\sqrt{4}\times\sqrt{6}-5\times\sqrt{9}\times\sqrt{6}\\&=4\sqrt{6}+3\times2\times\sqrt{6}-5\times3\times\sqrt{6}\\&=4\times\sqrt{6}+6\times\sqrt{6}-15\times\sqrt{6}\\&=(4+6-15)\times\sqrt{6}\\&=-5\sqrt{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E=3\sqrt{8}+5\sqrt{72}-4\sqrt{128}&=3\times\sqrt{4}\times\sqrt{2}+5\times\sqrt{9}\times\sqrt{8}-4\times\sqrt{64}\times\sqrt{2}\\&=3\times2\times\sqrt{2}+5\times3\times\sqrt{4}\times\sqrt{2}-4\times8\times\sqrt{2}\\&=6\times\sqrt{2}+15\times2\times\sqrt{2}-32\times\sqrt{2}\\&=6\times\sqrt{2}+30\times\sqrt{2}-32\times\sqrt{2}\\&=(6+30-32)\times\sqrt{2}\\&=4\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F=9\sqrt{20}-5\sqrt{45}-2\sqrt{180}&=9\times\sqrt{4}\times\sqrt{5}-5\times\sqrt{9}\times\sqrt{5}-2\times\sqrt{36}\times\sqrt{5}\\&=9\times2\times\sqrt{5}-5\times3\times\sqrt{5}-2\times6\times\sqrt{5}\\&=18\times\sqrt{5}-15\times\sqrt{5}-12\times\sqrt{5}\\&=(18-15-12)\times\sqrt{5}\\&=-9\sqrt{5}\end{aligned}$$

Exercice 7C.3

$$A=\left(3\sqrt{7}-5\right)\left(2-4\sqrt{7}\right)$$
$$=3\sqrt{7}\times 2-3\sqrt{7}\times 4\sqrt{7}-5\times 2+5\times 4\sqrt{7}$$
$$=6\sqrt{7}-12\times 7-10+20\sqrt{7}$$
$$=26\sqrt{7}-94$$

$$B=\sqrt{180}+3\sqrt{80}-2\sqrt{125}$$
$$=\sqrt{36}\times\sqrt{5}+3\times\sqrt{16}\times\sqrt{5}-2\times\sqrt{25}\times\sqrt{5}$$
$$=6\sqrt{5}+3\times 4\sqrt{5}-2\times 5\sqrt{5}$$
$$=6\sqrt{5}+12\sqrt{5}-10\sqrt{5}$$
$$=8\sqrt{5}$$

Exercice 7C.4

$$A=\frac{5}{3+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{5}{3+\sqrt{2}}\times\frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$$
$$=\frac{5\left(3-\sqrt{2}\right)}{3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$
$$=\frac{5\left(3-\sqrt{2}\right)}{9-2}$$
$$=\frac{5\left(3-\sqrt{2}\right)}{7}$$

$$B=\frac{5}{\sqrt{7}-4}$$
$$=\frac{5}{\sqrt{7}-4}\times\frac{\sqrt{7}+4}{\sqrt{7}+4}$$
$$=\frac{5\left(\sqrt{7}+4\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-4^2}$$
$$=\frac{5\left(\sqrt{7}+4\right)}{7-16}$$
$$=\frac{5\left(\sqrt{7}+4\right)}{-9}$$
$$=-\frac{5\left(\sqrt{7}+4\right)}{9}$$

$$C=\frac{3+\sqrt{2}}{4+\sqrt{8}}$$
$$=\frac{3+\sqrt{2}}{4+\sqrt{8}}\times\frac{4-\sqrt{8}}{4-\sqrt{8}}$$
$$=\frac{\left(3+\sqrt{2}\right)\left(4-\sqrt{8}\right)}{4^2-\left(\sqrt{8}\right)^2}$$
$$=\frac{12-3\sqrt{8}+4\sqrt{2}-\sqrt{16}}{16-8}$$
$$=\frac{8-3\sqrt{8}+4\sqrt{2}}{8}$$
$$=\frac{8-3\times 2\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{8}$$
$$=\frac{8-2\sqrt{2}}{8}=\frac{4-\sqrt{2}}{4}$$

$$D=\frac{8+\sqrt{8}}{8}$$
$$=\frac{2\times 4+\sqrt{4}\times\sqrt{2}}{2\times 4}$$
$$=\frac{2\times 4+2\times\sqrt{2}}{2\times 4}$$
$$=\frac{\boxed{2}\left(4+\sqrt{2}\right)}{\boxed{2}\times 4}$$
$$=\frac{4+\sqrt{2}}{4}$$

Exercice 7C.5 : Voici une formule imaginaire : $R = 4\pi\sqrt{\frac{10}{P}}$

Quelle doit être la pression P sachant que la résistance R est égale à 12 ?

$$12 = 4\pi\sqrt{\frac{10}{P}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{12}{4\pi} = \sqrt{\frac{10}{P}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{\pi}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{10}{P}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{\pi^2} = \frac{10}{P}$$

$$\Leftrightarrow 9 \times P = 10 \times \pi^2$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{10\pi^2}{9}$$

La valeur cherchée est $\frac{10\pi^2}{9}$

Exercice 7C.6 : Voici une formule imaginaire : $S = 2\pi \times B\sqrt{\frac{4 \times C}{3 \times R}}$

Quelle doit être la valeur du respect R sachant que le bonheur B est égal à 70, la sérénité S est égale à 900 et la chance C est égale à 22. Arrondir à l'entier le plus proche. Justifier votre réponse.

$$S = 2\pi \times B\sqrt{\frac{4 \times C}{3 \times R}} \Leftrightarrow 900 = 2\pi \times 70\sqrt{\frac{4 \times 22}{3 \times R}} \Leftrightarrow \frac{900}{2\pi \times 70} = \sqrt{\frac{88}{3 \times R}} \Leftrightarrow \frac{45}{7\pi} = \sqrt{\frac{88}{3 \times R}} \Leftrightarrow \left(\frac{45}{7\pi}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{88}{3 \times R}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2025}{49\pi^2} = \frac{88}{3 \times R} \Leftrightarrow 2025 \times 3 \times R = 88 \times 49\pi^2 \Leftrightarrow R = \frac{88 \times 49\pi^2}{2025 \times 3} \simeq 7$$

Exercice 7C.7 : Voici une formule imaginaire : $S = 2B\sqrt{\frac{7C}{2\pi R}}$

Quelle doit être la valeur du respect R sachant que le bonheur B est égal à 88, la sérénité S est égale à 777 et la chance C est égale à 22. Arrondir à l'entier le plus proche. Justifier votre réponse.

$$S = 2B\sqrt{\frac{7C}{2\pi R}} \Leftrightarrow 777 = 2 \times 88\sqrt{\frac{4 \times 22}{2\pi \times R}} \Leftrightarrow \frac{777}{176} = \sqrt{\frac{88}{2\pi \times R}} \Leftrightarrow \left(\frac{777}{176}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{88}{2\pi \times R}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{603\ 729}{30\ 976} = \frac{88}{2\pi \times R} \Leftrightarrow 603\ 729 \times 2\pi \times R = 88 \times 30\ 976 \Leftrightarrow R = \frac{88 \times 30\ 976}{603\ 729 \times 2\pi} \simeq 0,719$$

Exercice 7C.8 :

Qui est le plus grand entre $11\sqrt{12}$ *et* $12\sqrt{11}$ *?*

Deux méthodes :

Méthode 1 : on compare les carrés de ces deux nombres :

$$\left(11\sqrt{12}\right)^2 = 11^2 \times 12 = 121 \times 12 = 121 \times (10+2) = 1210 + 242 = 1452$$

$$\left(12\sqrt{11}\right)^2 = 12^2 \times 11 = 144 \times 11 = 144 \times (10+1) = 1440 + 144 = 1884$$

Donc $\left(12\sqrt{11}\right)^2 > \left(11\sqrt{12}\right)^2$ et $12\sqrt{11} > 11\sqrt{12}$

Méthode 2 : étude générale comparative des carrés des nombres $x\sqrt{x+1}$ et $(x+1)\sqrt{x}$:

$$\left(x\sqrt{x+1}\right)^2 = x^2 \times (x+1) = x^3 + x^2$$

$$\left((x+1)\sqrt{x}\right)^2 = (x+1)^2 \times x = \left(x^2+2x+1\right)\times x = x^3+2x^2+x = x^3+x^2+x^2+x$$

Ainsi

$$\left((x+1)\sqrt{x}\right)^2 = \left(x\sqrt{x+1}\right)^2 + x^2 + x$$

Les valeurs de x sont positives, donc :

$$\left((x+1)\sqrt{x}\right)^2 > \left(x\sqrt{x+1}\right)^2$$

Soit : $(x+1)\sqrt{x} > x\sqrt{x+1}$

Et ici : $12\sqrt{11} > 11\sqrt{12}$

Exercice 7C.9 :

Calculer $\sqrt{3^{99}+3^{99}+3^{99}}$.

$$\sqrt{3^{99}+3^{99}+3^{99}} = \sqrt{3\times 3^{99}} = \sqrt{3^{100}} = \sqrt{\left(3^{50}\right)^2} = 3^{50}$$

Exercice 7C.10 : *Simplifier* $\sqrt{11-4\sqrt{7}}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{11-4\sqrt{7}} &= \sqrt{11-2\times 2\times\sqrt{7}}\\ &= \sqrt{4-2\times 2\times\sqrt{7}+7}\\ &= \sqrt{2^2-2\times 2\times\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2}\\ &= \sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2}\\ &= \left|2-\sqrt{7}\right|\\ &= \sqrt{7}-2\end{aligned}$$

Exercice 7C.11 : *Simplifier* $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{16}}$.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{16}} &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{6}+\sqrt{8}+2}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\right)+\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\sqrt{2}\times\sqrt{4}+\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\right)+\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\right)}\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{2}} \times \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1-2}$$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{-1}$$

$$= \sqrt{2}-1$$