Seconde – Exercices ouverts et problèmes

Exercice 1

Un père de trois enfants laisse en héritage 1600 couronnes.
Le testament précise que l'aîné doit recevoir 200 couronnes de plus que le deuxième, le deuxième 100 couronnes de plus que le dernier.
De quelle somme hérite chacun des enfants ?

Exercice 2

Un père mourut en laissant quatre fils, ceux-ci se partagèrent ses biens de la manière suivante :

- le premier prit la moitié de la fortune moins 3000 écus;
- le deuxième prit le tiers de la fortune moins 1000 écus;
- le troisième prit exactement le quart de la fortune ;
- le quatrième prit 600 écus plus le cinquième de la fortune.

1) Quelle était la fortune du père ?
2) Quelle somme reçut chaque enfant ?

Exercice 3 : Si l'on écrit sous forme décimale le nombre $100^{33}-33$, quelle est la somme de ses chiffres ?

Exercice 4 : Les entiers de la forme n^3-n sont divisibles par 6. Vrai ou faux ?

Exercice 5 : Peut-on écrire 2004 comme somme de quatre entiers consécutifs ?
Et votre année de naissance ? Y-a-t-il une règle ?

Exercice 6 : Quel est le plus petit entier naturel supérieur à 2 qui soit à la fois un carré parfait et un cube parfait ?

Exercice 7 :

Philippe a acheté 24 bouteilles de jus d'orange. Grâce à un marchandage, Mathilde a obtenu une réduction de 0,1 euro par bouteille ; elle a pu ainsi acheter pour le même prix 2 bouteilles de plus que Philippe. Quel est le prix initial d'une bouteille ?

Exercice 8 : La somme de deux nombres est 300.
De combien augmente leur produit quand chaque nombre augmente de 7 ?

Exercice 9 : Trouver deux nombres entiers a et b non nuls tels que $28a=b^2$.

Exercice 10 : Résoudre $\frac{1}{5}=\frac{1}{7}+\frac{1}{x}$

Exercice 11 :

Un fermier possède 6000 poules pondant chacune, en moyenne, 240 œufs par an.
Chaque poule mange annuellement 40 kg de nourriture coûtant 6000 euros par tonne.
À combien d'euros revient la nourriture nécessaire pour produire un œuf ?

Exercice 12 :

Lorsqu'elle met au monde son quatrième enfant, une mère a trois fois la somme des âges de ses trois premiers enfants. Elle se dit alors que, dans huit ans, son âge sera la somme de ceux de ses quatre enfants.
Quel est son âge actuel ?

Exercice 13 :

Une mouche volant à 400 km/h part de Paris à 8 h du matin en longeant la ligne TGV. Le TGV part en même temps qu'elle de Paris à 200 km/h ; à 9 h un autre TGV part de Marseille (la distance Paris-Marseille est de 700 km) à 300 km/h.
La mouche vole le long de la ligne jusqu'à ce qu'elle rencontre le TGV de Marseille ; à ce moment elle fait demi-tour, toujours en suivant la ligne, et rencontre le train venant de Paris, moment où elle fait demi-tour, etc.
Lorsque les deux trains se croisent, la mouche meurt. Sur quelle distance la mouche a-t-elle volé ?

Exercice 14 :

Simplifier le produit $(x-a)(x-b)(x-c)...(x-z)$.

Exercice 15 :

But de l'exercice : "trouver deux nombres X et Y connaissant leur somme, 50, et leur produit, 589."

1. Justifier l'argument suivant : "Si deux nombres X et Y ont pour somme 50, ils peuvent s'écrire $\mathrm{X}=25+a$ et $\mathrm{Y}=25-a$."
2. Établir alors l'équation suivante : $a^2=36$.
3. Résoudre l'équation $a^2=36$ et trouver X et Y.

Exercice 16 :

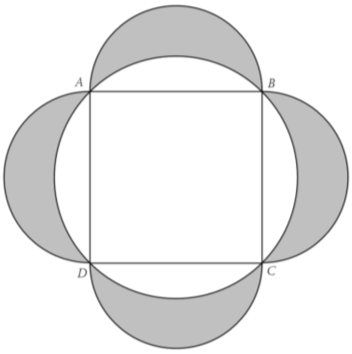
Le thermomètre de Jojo l'esquimau est cassé : au lieu d'indiquer la température extérieure normale, il la divise par cinq, ajoute 1 et élève au carré.
Jojo lit 36° sur son thermomètre. Quelle température fait-il réellement aujourd'hui au Groenland ?

Exercice 17 : Une équation à 2 inconnues

On lance 5 dés et on obtient un "full" (figure constituée d'un nombre affiché par 2 dés et d'un autre nombre affiché par 3 dés comme par exemple : 44555).
On sait que le total des points est 22. Quel était le full obtenu ?

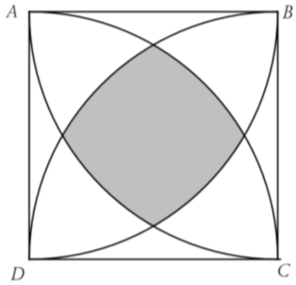
Exercice 18 :

ABCD est un carré de côté a.
Calculer en fonction de a l'aire du domaine grisé.



Exercice 19 :

ABCD est un carré de côté a.
Calculer l'aire du domaine coloré en fonction de a.



CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1

Un père de trois enfants laisse en héritage 1600 couronnes.
Le testament précise que l'aîné doit recevoir 200 couronnes de plus que le deuxième, le deuxième 100 couronnes de plus que le dernier.
De quelle somme hérite chacun des enfants ?

Soit x la somme que doit recevoir l'aîné. Le cadet doit recevoir $x-200$ couronnes et le benjamin $x-300$ couronnes.

Ainsi : $x+(x-200)+(x-300)=1600$

$x+x-200+x-300=1600$

$3x-500=1600$

$3x=1600+500$

$3x=2100$

$x=\dfrac{2100}{3}=700$:

L'ainé héritera de 700 couronnes, le cadet de 500 couronnes et le benjamin aura 400 couronnes.
Vérification : $700+500+400=1600$.

Exercice 2

Un père mourut en laissant quatre fils, ceux-ci se partagèrent ses biens de la manière suivante :

- *le premier prit la moitié de la fortune moins 3000* écus*;*
- *le deuxième prit le tiers de la fortune moins 1000* écus*;*
- *le troisième prit exactement le quart de la fortune ;*
- *le quatrième prit 600 écus plus le cinquième de la fortune.*

1) *Quelle était la fortune du père ?*
2) *Quelle somme reçut chaque enfant ?*

1) On pose x la fortune du père.

Le premier a pris $\dfrac{x}{2}-3000$, le deuxième a pris $\dfrac{x}{3}-1000$, le troisième a pris $\dfrac{x}{4}$ et le quatrième $\dfrac{x}{5}+600$

La somme des héritages est bien sûr égale à la somme dont disposait le père, donc on obtient l'équation :

$$\frac{x}{2}-3000+\frac{x}{3}-1000+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+600=x$$

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}-x=3000+1000-600$$

$$\frac{x\times 30}{2\times 30}+\frac{x\times 20}{3\times 20}+\frac{x\times 15}{4\times 15}+\frac{x\times 12}{5\times 12}-x\times\frac{60}{60}=3400$$

$$\frac{30x}{60}+\frac{20x}{60}+\frac{15x}{60}+\frac{12x}{60}-\frac{60x}{60}=3400$$

$$\frac{17x}{60}=3400$$

$$17x=3400\times 60$$

$$x=\frac{3400\times 60}{17}=\frac{34\times 100\times 60}{17}=2\times 100\times 60=12\ 000$$: le père avait 12 000 écus.

2) Le premier a reçu : $\frac{x}{2}-3000=\frac{12\,000}{2}-3000=3000$ écus.

Le deuxième a reçu : $\frac{x}{3}-1000=\frac{12\,000}{3}-1000=3000$ écus.

Le troisième a reçu : $\frac{x}{4}=\frac{12\,000}{3}=3000$ écus.

Le quatrième a reçu : $\frac{x}{5}+600=\frac{12\,000}{5}+600=3000$ écus.

Exercice 3 : *Si l'on écrit sous forme décimale le nombre $100^{33}-33$, quelle est la somme de ses chiffres ?*

Pour bien démarrer : $100-33=67$

Le nombre 100^{33} s'écrit avec un 1 suivi de 33 zéros et possède donc 34 chiffres.

Le nombre $100^{33}-33$ va donc posséder 33 chiffres, tous égaux à 9 sauf les deux derniers égaux à 6 et à 7 :

$$\underbrace{999...999}_{31\,chiffres\,9}67$$

La somme cherchée est :

$$9\times31+6+7=279+6+7=292$$

Exercice 4 : *Les entiers de la forme n^3-n sont divisibles par 6. Vrai ou faux ?*

$$n^3-n=n\times n^2-n\times1=n\left(n^2-1\right)=n\left(n^2-1^2\right)=n(n+1)(n-1)$$

Donc le nombre n^3-n est divisible par trois nombres consécutifs : $n-1$, n et $n+1$.
Donc un de ces trois nombres est pair.
D'autres sur trois nombres consécutifs, un des trois est un multiple de trois.
Donc le nombre n^3-n est divisible par 2 et par 3 premiers entre eux : il est divisible par $2\times3=6$.

Exercice 5 : *Peut-on écrire 2004 comme somme de quatre entiers consécutifs ?*
Et votre année de naissance ? Y-a-t-il une règle ?

Soit x, $x+1$, $x+2$ et $x+3$ quatre entiers consécutifs.

Ainsi on doit résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} & x+x+1+x+2+x+3=2004 \\ \Leftrightarrow\ & 4x+6=2004 \\ \Leftrightarrow\ & 4x=2004-6 \\ \Leftrightarrow\ & 4x=1998 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{4x}{4}=\frac{1998}{4} \\ \Leftrightarrow\ & x=499{,}5 \end{aligned}$$

Il faut donc que le nombre étudié soustrait de 6 soit un multiple de 4.

Exercice 6 : *Quel est le plus petit entier naturel supérieur à 2 qui soit à la fois un carré parfait et un cube parfait ?*

Soit x le nombre cherché. x vérifie :

$$x^3=x^2 \ \Leftrightarrow\ x^3-x^2=0 \ \Leftrightarrow\ x^2\times x-x^2\times1=0 \ \Leftrightarrow\ x^2(x-1)=0$$

Soit $x^2=0 \ \Leftrightarrow\ x=0$, soit $x-1=0 \ \Leftrightarrow\ x=1$

Il n'y en a pas d'autre que 1.

Exercice 7 :

Philippe a acheté 24 bouteilles de jus d'orange. Grâce à un marchandage, Mathilde a obtenu une réduction de 0,1 euro par bouteille ; elle a pu ainsi acheter pour le même prix 2 bouteilles de plus que Philippe. Quel est le prix initial d'une bouteille ?

Soit x le prix initial d'une bouteille payée par Philippe

→Mathilde a donc payé chaque bouteille $x-0{,}1$ €.

Philippe a acheté 24 bouteilles donc Mathilde en a acheté 26.

D'après l'énoncé :

$$\begin{aligned} & x\times 24=(x-0{,}1)\times 26 \\ \Leftrightarrow\ & 24x=26x-2{,}6 \\ \Leftrightarrow\ & 24x-26x=-2{,}6 \\ \Leftrightarrow\ & -2x=-2{,}6 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{-2x}{-2}=\frac{-2{,}6}{-2} \\ \Leftrightarrow\ & x=1{,}3 \end{aligned}$$

Initialement, chaque bouteille coûtait 1,30 €.

Exercice 8 : *La somme de deux nombres est 300.*
De combien augmente leur produit quand chaque nombre augmente de 7 ?

Soit x et y les nombres cherchés.

→ $x+y=300$

Calculons :

$$\begin{aligned}(x+7)(y+7)&=xy+7x+7y+49\\ &=xy+7(x+y)+49\end{aligned}$$

Or $x+y=300$, donc

$$\begin{aligned}(x+7)(y+7)&=xy+7\times 300+49\\ &=xy+2100+49\\ &=xy+2149\end{aligned}$$

Le produit de ces nombres augmente de 2149.

Exercice 9 : Trouver deux nombres entiers a et b non nuls tels que $28a=b^2$.

$28a=b^2$ donc b^2 est un carré parfait.

28 se décompose ainsi :

$$28=7\times 4=7\times 2^2$$

Si l'on multiplie le nombre 7×2^2 par 7, on obtient :

$$7\times 2^2\times 7=7^2\times 2^2=14^2.$$

Ainsi $a=7$ et $b=14$.

Exercice 10 : *Résoudre* $\frac{1}{5}=\frac{1}{7}+\frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5}=\frac{1}{7}+\frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{5}-\frac{1}{7}=\frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1\times7}{5\times7}-\frac{1\times5}{7\times5}=\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{35}-\frac{5}{35}=\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{35}=\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{35}{2}=\frac{x}{1}$$

Ainsi $x=\frac{35}{2}$.

Exercice 11 :

Un fermier possède 6000 poules pondant chacune, en moyenne, 240 œufs par an.
Chaque poule mange annuellement 40 kg de nourriture coûtant 6000 euros par tonne.
À combien d'euros revient la nourriture nécessaire pour produire un œuf ?

En une année, les poules pondent :

$6000\times240=1\ 440\ 000$ œufs.

En une année, les poules mangent :

$6000\times40=240\ 000\,kg$ de nourriture, soit $240\,tonnes$.

Chaque, le coût en nourriture des poules est :

$6000\times240=1\ 440\ 000\,€$.

Chaque œuf pondu a nécessité 1 € de nourriture.

Exercice 12 :

Lorsqu'elle met au monde son quatrième enfant, une mère a trois fois la somme des âges de ses trois premiers enfants. Elle se dit alors que, dans huit ans, son âge sera la somme de ceux de ses quatre enfants.
Quel est son âge actuel ?

Aujourd'hui cette maman a x années et son bébé 0 an, tout fraîchement arrivé.
En appelant a, b et c l'âge des trois premiers enfants, on a la relation :

$$x=3(a+b+c).$$

Dans 8 ans, chaque enfant aura huit années de plus :

$a+8$, $b+8$, $c+8$ et 8 pour le dernier né.

La maman aura $x+8$ années.
D'après l'énoncé, dans huit années :

$$x+8=(a+8)+(b+8)+(c+8)+8$$

$$\Leftrightarrow x+8=a+b+c+32$$

$$\Leftrightarrow x=a+b+c+32-8$$

$$\Leftrightarrow x=a+b+c+24$$

Or $x=3(a+b+c)$ donc $a+b+c=\frac{x}{3}$.

Ainsi : $$x=\frac{x}{3}+24$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{x}{3}=24$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{3}-\frac{x}{3}=24$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{3}-\frac{x}{3}=24$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x}{3}=24$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x}{3}\times\frac{3}{2}=24\times\frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=36$$

La maman a 36 ans.

Exercice 13 :

Une mouche volant à 400 km/h part de Paris à 8 h du matin en longeant la ligne TGV. Le TGV part en même temps qu'elle de Paris à 200 km/h ; à 9 h un autre TGV part de Marseille (la distance Paris-Marseille est de 700 km) à 300 km/h.

La mouche vole le long de la ligne jusqu'à ce qu'elle rencontre le TGV de Marseille ; à ce moment elle fait demi-tour, toujours en suivant la ligne, et rencontre le train venant de Paris, moment où elle fait demi-tour, etc.

Lorsque les deux trains se croisent, la mouche meurt. Sur quelle distance la mouche a-t-elle volé ?

La problématique est simple : on connait la vitesse de la mouche : 400 km/h, si l'on arrive à calculer son temps de parcours, la distance sera donnée par la formule :

$$v=\frac{d}{t} \Leftrightarrow d=v\times t.$$

Le temps de vol de la mouche est le même que celui du TGV parti de Paris, appelons-le T. ; le TGV venant de Marseille aura circulé un temps égal à $\mathrm{T}-1$.

Au moment où les trains se rencontrent, la somme de leurs distances parcourues est égale à 700 km, ce qui s'écrit ainsi :

$$200\times\mathrm{T}+300\times(\mathrm{T}-1)=700$$
$$\Leftrightarrow 200\mathrm{T}+300\mathrm{T}-300=700$$
$$\Leftrightarrow 500\mathrm{T}=700+300$$
$$\Leftrightarrow 500\mathrm{T}=1000$$
$$\Leftrightarrow \frac{500\mathrm{T}}{500}=\frac{1000}{500}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{T}=2.$$

L'accident survient deux heures après le départ.

La mouche ayant volé à 400 km/h, sa distance parcourue est :

$$d=v\times\mathrm{T}=400\times2=800 \text{ km.}$$

Exercice 14 :

Simplifier le produit $(x-a)(x-b)(x-c)...(x-z)$.

Il s'agit d'une petite ruse, en décomposant les écritures, on voit que :

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)...(x-v)(x-w)(x-x)(x-y)(x-z)$$

Or la parenthèse $(x-x)=0$ donc le produit global est nul.

Exercice 15 :

But de l'exercice : "trouver deux nombres X et Y connaissant leur somme, 50, et leur produit, 589."

1. *Justifier l'argument suivant : "Si deux nombres X et Y ont pour somme 50, ils peuvent s'écrire* $\mathrm{X}=25+a$ *et* $\mathrm{Y}=25-a$*."*
2. *Établir alors l'équation suivante :* $a^2=36$.

3. *Résoudre l'équation $a^2 = 36$ et trouver X et Y.*

1) Les écritures proposées $X = 25 + a$ et $Y = 25 - a$ donnent :

$$X + Y = 25 + a + 25 - a = 50$$

2) La deuxième relation : $X \times Y = 589$ donne :

$$(25 + a)(25 - a) = 589$$

$$\Leftrightarrow \quad 25^2 - a^2 = 589$$

$$\Leftrightarrow \quad 625 - a^2 = 589$$

$$\Leftrightarrow \quad -a^2 = 589 - 625$$

$$\Leftrightarrow \quad -a^2 = -36$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 = 36$$

3) L'équation $a^2 = 36$ possède deux solutions : $a = 6$ et $a = -6$.

On obtient les solutions :

$$X = 25 + 6 = 31 \quad \text{et} \quad Y = 25 - 6 = 19$$

et $$X = 25 + (-6) = 19 \quad \text{et} \quad Y = 25 - (-6) = 25 + 6 = 31$$

Exercice 16 :

Le thermomètre de Jojo l'esquimau est cassé : au lieu d'indiquer la température extérieure normale, il la divise par cinq, ajoute 1 et élève au carré.

Jojo lit 36° sur son thermomètre. Quelle température fait-il réellement aujourd'hui au Groenland ?

Soit *x* la température réelle :

$$\left(\frac{x}{5}+1\right)^2 = 36 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{5}+1\right)^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{5}+1\right)^2 - 6^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{5}+1+6\right)\left(\frac{x}{5}+1-6\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{5}+7\right)\left(\frac{x}{5}-5\right) = 0$$

Soit $\frac{x}{5} + 7 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{5} = -7 \Leftrightarrow \frac{x}{5} \times 5 = -7 \times 5 \Leftrightarrow x = -35$

Soit $\frac{x}{5} - 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{5} = 5 \Leftrightarrow \frac{x}{5} \times 5 = 1 \times 5 \Leftrightarrow x = 5$

Deux solutions possibles : -35°C ou 5°C

Exercice 17 : Une équation à 2 inconnues

On lance 5 dés et on obtient un "full" (figure constituée d'un nombre affiché par 2 dés et d'un autre nombre affiché par 3 dés comme par exemple : 44555).

On sait que le total des points est 22. Quel était le full obtenu ?

Soit *x* la valeur du premier nombre sorti deux fois et y la valeur du deuxième nombre sorti trois fois.

Deux possibilités :

$$2x + 3y = 22$$

Donc $$3y = 22 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{22 - 2x}{3}.$$

Or y est un nombre entier compris entre 1 et 6 : on va tester différentes valeurs de x pour voir quelles sont les valeurs de y associées par cette relation :

Si $x = 1$, alors $\Leftrightarrow \quad y = \frac{22 - 2 \times 1}{3} = \frac{22 - 2}{3} = \frac{20}{3} \simeq 6,7$

Si $x=2$, alors $\Leftrightarrow \quad y=\frac{22-2\times 2}{3}=\frac{22-4}{3}=\frac{18}{3}=6$

Si $x=3$, alors $\Leftrightarrow \quad y=\frac{22-2\times 3}{3}=\frac{22-6}{3}=\frac{16}{3}\simeq 5,3$

Si $x=4$, alors $\Leftrightarrow \quad y=\frac{22-2\times 4}{3}=\frac{22-8}{3}=\frac{14}{3}\simeq 4,7$

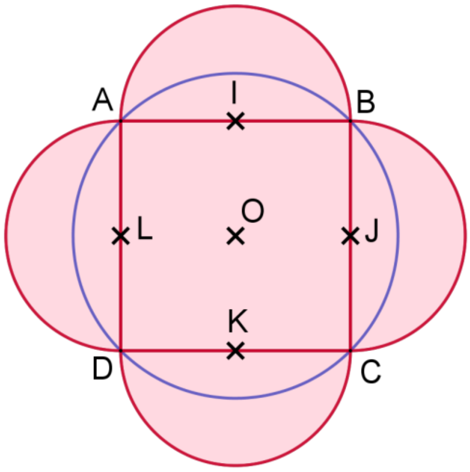
Si $x=5$, alors $\Leftrightarrow \quad y=\frac{22-2\times 5}{3}=\frac{22-10}{3}=\frac{12}{3}=4$

Si $x=6$, alors $\Leftrightarrow \quad y=\frac{22-2\times 6}{3}=\frac{22-12}{3}=\frac{10}{3}\simeq 3,3$

Deux full possibles : $(2-2-6-6-6)$ et $(5-5-4-4-4)$

Exercice 18 :

ABCD est un carré de côté a.
Calculer en fonction de a l'aire du domaine grisé.



Il convient de faire apparaitre les cercles complets ayant servi à la construction de la figure :
Soit O le centre du carré ABCD et I, J, K et L les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
Il est facile de calculer l'aire totale de couleur rouge, somme des aires d'un carré et de 4 demi-disques :

$$A_1 = a\times a+4\times\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2+4\times\frac{1}{2}\times\pi\times\frac{a^2}{4}$$

$$A_1 = a^2+\frac{\pi a^2}{2}$$

Il faut calculer le rayon OA du cercle intérieur bleu.
Les diagonales du carré sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu donc le triangle OAB est rectangle en O et $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2=\mathrm{AB}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\times\mathrm{OA}^2=a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{OA}^2=\frac{a^2}{2}$$

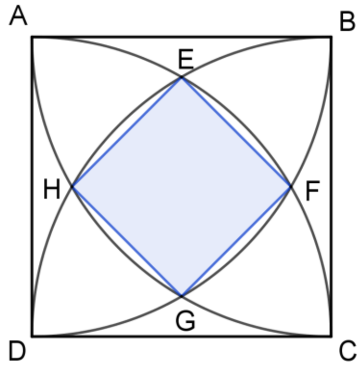
$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{OA}=\sqrt{\frac{a^2}{2}}$$

Ainsi l'aire du disque intérieur est :

$$A_2=\pi\times\mathrm{OA}^2=\pi\times\frac{a^2}{2}$$

Ainsi, l'aire des lunules cherchée vaut :

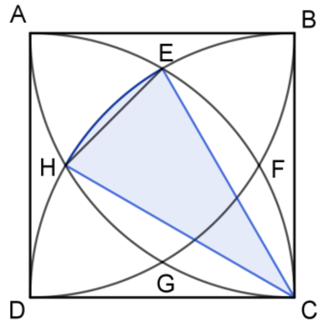
$$A_1-A_2=a^2+\frac{\pi a^2}{2}-\frac{\pi a^2}{2}=a^2$$



Exercice 19 :

ABCD est un carré de côté a.
Calculer l'aire du domaine coloré en fonction de a.

Le carré ABCD contient 4 quarts de cercle de centres respectifs A, B C et D.
Sur la première figure, on voit que l'aire cherchée est égale à l'aire du carré EFGH + 4 fois l'aire d'un lunule.
Sur la deuxième figure, on voit que l'aire d'un lunule est égale à l'aire du secteur angulaire moins l'aire du triangle intérieur.
…



Considérons le plan $\left(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}\right)$

Soient E,F,G,et H les points d' intersection des quarts de cercles.

Alors $E\left(\frac{1}{2}; \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right), F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right), G\left(\frac{1}{2}; \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$ et $H\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Calculons d' abord l' aire du carré EFGH:

$$Aire(carr\acute{e}) = EF^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{4} = 2 - \sqrt{3}$$

Calculons puis l' angle $\widehat{EDF}$ à l' aide du théorème de Pythagore généralisé:

$$EF^2 = DF^2 + DE^2 - 2 \cdot DE \cdot DF \cdot \cos\left(\widehat{EDF}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{EDF} = \frac{DF^2 + DE^2 - EF^2}{2 \cdot DE \cdot DF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{EDF} = \frac{\pi}{6}$$

Calculons maintenant l' aire de l' arc circulaire EF:

Aire(arc)=$\frac{\pi}{12}$

Calculons encore l' aire du triangle DEF:

Aire(triangle)=$\frac{1}{2} \cdot DE \cdot DF \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$

Calculons enfin l' aire de la partie bleue:

$$Aire = 4 \cdot \left(Aire(arc) - Aire(\text{triangle})\right) + Aire(carr\acute{e})$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}\right) + 2 - \sqrt{3}$$

$$= \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 1$$

→ $E\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

→ici calcul de FG^2

$$EF^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

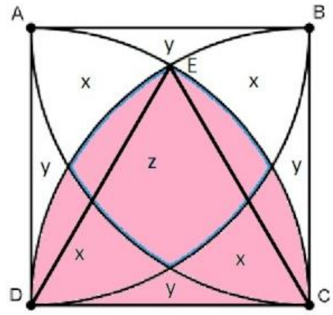
$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 2\left(\frac{3}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 2 - \sqrt{3}$$

Autre méthode : Avec les notations de la figure $(a=1)$, on a le système :



$$\begin{cases} 4x+4y+z=1 \\ 3x+2y+z=\dfrac{\pi}{4} \\ 2x+y+z=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

La 1ère équation est obtenue en calculant l'aire du carré,
la 2ème en calculant l'aire d'un quart de cercle.
La dernière équation est plus subtile :
on calcule l'aire de la partie colorée en rosé, qui est la somme de deux secteurs circulaires d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rayon 1, dont il faut retrancher l'aire du triangle équilatéral DCE.

La solution du système peut être trouvée sans peine ... :

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{12}\left(-12+6\sqrt{3}+\pi\right) \\ y=\dfrac{1}{12}\left(12-3\sqrt{3}-2\pi\right) \\ z=1-\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$