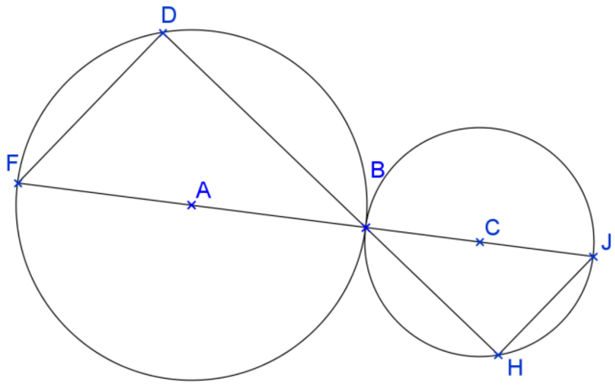
Contrôle de géométrie plane
(recto/verso)

Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre. (Platon)

Exercice 1 :

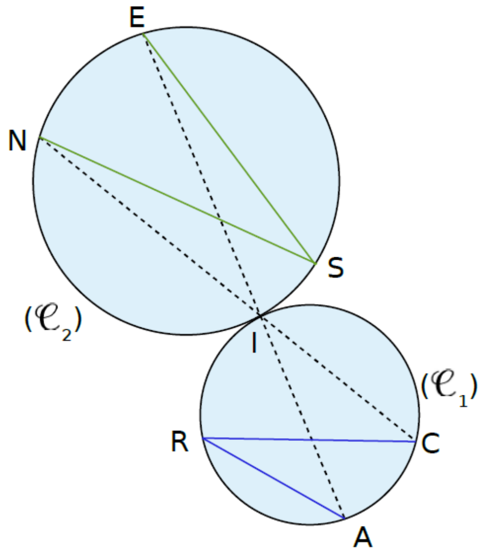
Sur la figure ci-contre, les points F, A, B, C, J et les points D, B, H sont alignés.
Les rayons des cercles sont :
AF = 6,5 cm et CJ = 5 cm.
On donne BD = 12 cm.
L'objectif est de calculer HJ.
Indications :

1) Déterminer la nature des deux triangles.
2) Calculer FD.
3) Justifier soigneusement un parallélisme.
4) En utilisant la question 3, calculer BH.
5) Calculer HJ.



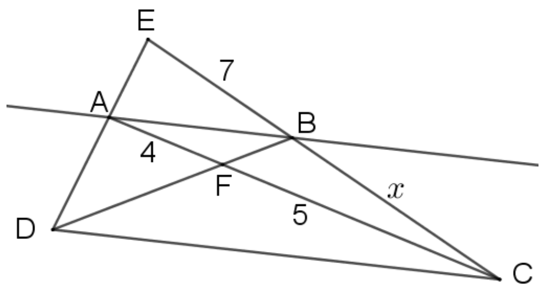
Exercice 2 :

Sur la figure ci-contre, les points A, I et E d'une part, et C, I et N d'autre part sont alignés et les deux cercles sont tangents au point I.
On pose $x = \overset{\frown}{ARC}$.
Que peut-on dire de angles $\widehat{ARC}$ et $\widehat{NSE}$? Justifiez votre réponse.



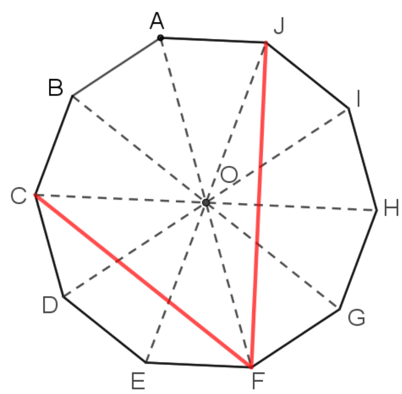
Exercice 3 :

L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure ci-contre, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
On donne :
EB = 7 , BC = x , AF = 4 , FC = 5.
Exprimer avec soin le rapport $\dfrac{AB}{CD}$ de deux façons différentes.
A partir des deux relations obtenues, calculer x.



Exercice 4 :

On considère le décagone régulier ABCDEFGHIJ de centre O ci-contre.
Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{CFJ}$. Justifier.



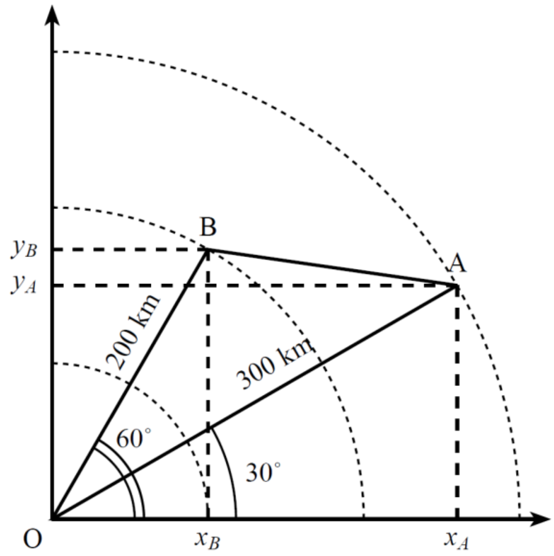
BONUS : **Repérage radar**

Pour cet exercice toute trace de recherche sera pris en compte dans la correction

L’écran d’un radar de contrôle aérien enregistre l’apparition d’un avion en A à 300 km de O sous un angle de 30°.

L’avion se déplace en ligne droite à vitesse constante. Quinze minutes plus tard, l’avion est en B à 200 km de O sous un angle de 60°.

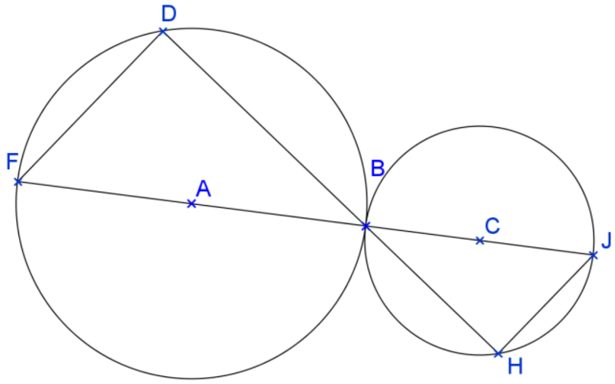
On choisit comme unité de repère le km.



1) Quelles sont les coordonnées exactes de A et B ?
2) a) Calculer la distance approchée de AB au km près ?
   On rappelle que :
   $$AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$$
   b) Quelle est la vitesse approchée de l’avion arrondie à 1 km/h près ?

Contrôle de géométrie plane – CORRIGE – M. Quet

Exercice 1 :



Sur la figure ci-contre, les points F, A, B, C, J et les points D, B, H sont alignés.
Les rayons des cercles sont :
AF = 6,5 cm et CJ = 5 cm.
On donne BD = 12 cm.
L'objectif est de calculer HJ.
Indications :

1) *Déterminer la nature des deux triangles.*
2) *Calculer FD.*
3) *Justifier soigneusement un parallélisme.*
4) *En utilisant la question 3, calculer BH.*
5) *Calculer HJ.*

1) Le triangle FDB est inscrit dans un cercle de diamètre $[FB]$ donc il est rectangle en D et $(FD) \perp (DB)$

Le triangle BHJ est inscrit dans un cercle de diamètre $[BJ]$ donc il est rectangle en H et $(BH) \perp (HJ)$

2) Le triangle FDB est rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore :

$$BD^2 + DF^2 = BF^2 \iff 12^2 + DF^2 = 13^2 \iff DF^2 = 169 - 144 = 25 \iff DF = \sqrt{25} = 5$$

3) Les points D, B et H étant alignés, on obtient les relations $(FD) \perp (DH)$ et $(DH) \perp (HJ)$.

On en déduit : $(FD) // (HJ)$.

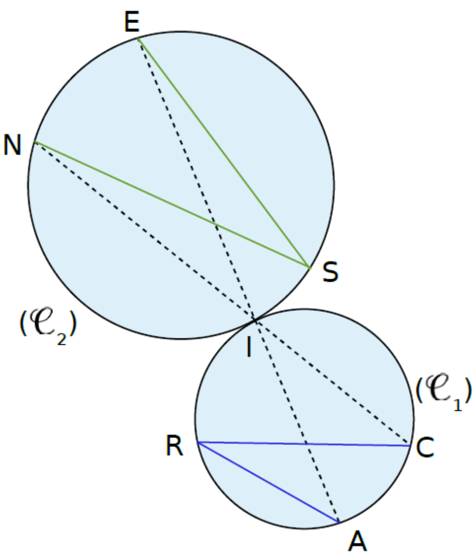
4) Les droites (FJ) et (DH) se coupent en B et $(FD) // (HJ)$, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BD}{BH} = \frac{BF}{BJ} \iff \frac{12}{BH} = \frac{13}{10} \iff 13 \times BH = 12 \times 10 \iff BH = \frac{120}{13} \simeq 9{,}23 \text{ cm.}$$

5) Le triangle BHJ est rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :

$$BH^2 + HJ^2 = BJ^2 \iff \left(\frac{120}{13}\right)^2 + HJ^2 = 6^2 \iff HJ^2 = 36 - \left(\frac{120}{13}\right)^2 \iff HJ = \frac{50}{13} \text{ cm.}$$

Exercice 2 :



Sur la figure ci-contre, les points A, I et E d'une part, et C, I et N d'autre part sont alignés et les deux cercles sont tangents au point I. On pose $x = \widehat{ARC}$.
Que peut-on dire de angles $\widehat{ARC}$ et $\widehat{NSE}$? Justifiez votre réponse.

Les angles inscrits $\widehat{ARC}$ et $\widehat{AIC}$ sont construits sur le même arc $\overset{\frown}{AC}$ donc ils sont égaux :

$\widehat{AIC} = \widehat{ARC} = x$.

Les angles $\widehat{AIC}$ et $\widehat{NIE}$ sont opposés par le sommet donc ils sont égaux :

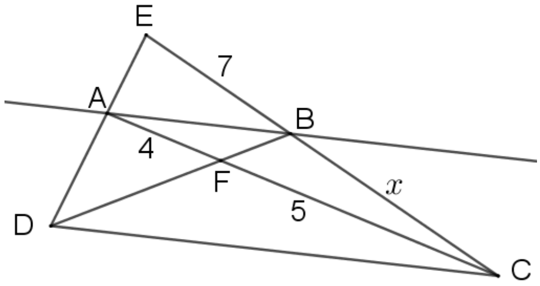
$\widehat{NIE} = \widehat{AIC} = x$.

Les angles $\widehat{NIE}$ et $\widehat{NSE}$ sont inscrits sur le même arc $\overset{\frown}{EN}$ donc ils sont égaux :

$\widehat{NSE} = \widehat{NIE} = x$.

Exercice 3 :

L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure ci-contre, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
On donne : EB = 7 , BC = x , AF = 4 , FC = 5.
Exprimer avec soin le rapport $\frac{\text{AB}}{\text{CD}}$ *de deux façons différentes.*
A partir des deux relations obtenues, calculer x.



1) Les droites (AC) et (BD) sont sécantes en F et $(\text{AB})//(\text{CD})$:
D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{\text{FA}}{\text{FC}}=\frac{\text{FB}}{\text{FD}}=\frac{\text{AB}}{\text{CD}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{5}=\frac{\text{FB}}{\text{FD}}=\frac{\text{AB}}{\text{CD}}.$$

Les droites (DA) et (BC) sont sécantes en E et $(\text{AB})//(\text{CD})$: D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{\text{EA}}{\text{ED}}=\frac{\text{EB}}{\text{EC}}=\frac{\text{AB}}{\text{CD}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\text{EA}}{\text{ED}}=\frac{7}{7+x}=\frac{\text{AB}}{\text{CD}}$$

2) Ainsi : $\frac{\text{AB}}{\text{CD}}=\frac{7}{x+7}=\frac{4}{5}$

Donc : $4(x+7)=7\times 5$

$\Leftrightarrow \; 4x+28=35$

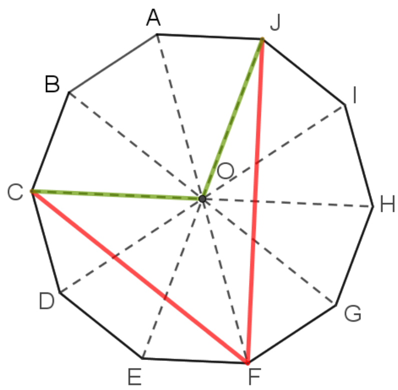
$\Leftrightarrow \; 4x=35-28$

$\Leftrightarrow \; 4x=7$

$\Leftrightarrow \; x=\frac{7}{4}$

Exercice 4 :

On considère le décagone régulier ABCDEFGHIJ de centre O ci-contre. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{\text{CFJ}}$*. Justifier.*



Le décagone est inscrit dans un cercle de centre O de rayon $[\text{OA}]$

L'angle au centre $\widehat{\text{CFJ}}$ et l'angle inscrit $\widehat{\text{COJ}}$ sont construits sur le même arc $\overset{\frown}{\text{CJ}}$. Or :

$$\widehat{\text{COJ}}=3\times\frac{360}{10}=3\times 36=108°$$

Donc : $\widehat{\text{CFJ}}=\frac{1}{2}\widehat{\text{COJ}}=\frac{1}{2}\times 108=54°.$

BONUS : Repérage radar

L'écran d'un radar de contrôle aérien enregistre l'apparition d'un avion en A à 300 km de O sous un angle de 30°.
L'avion se déplace en ligne droite à vitesse constante. Quinze minutes plus tard, l'avion est en B à 200 km de O sous un angle de 60°. On choisit comme unité de repère le km.

1) *Quelles sont les coordonnées exactes de A et B ?*

Soit H le projeté orthogonal de A sur l'axe $[\text{O}x)$.

Le triangle OAH est rectangle en H, ainsi :

$$x_{\text{A}}=\text{OA}\times\cos 30=300\times\cos 30=150\sqrt{3}\simeq 259{,}81$$

$$y_{\text{A}}=\text{OA}\times\sin 30=300\times\sin 30=150$$

D'où : $A\left(150\sqrt{3};150\right)$

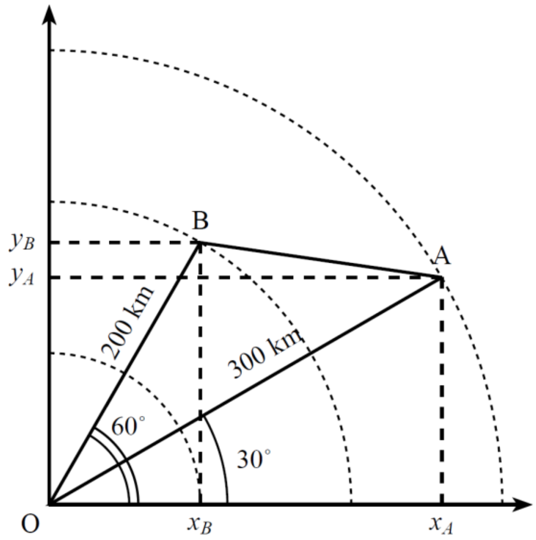
Soit K le projeté orthogonal de B sur l'axe $[Ox)$.

Le triangle OBK est rectangle en K, ainsi :

$x_B = OB\times\cos 60 = 200\times\cos 60 = 100$

$y_B = OB\times\sin 60 = 200\times\sin 60 = 100\sqrt{3} \simeq 173,21$

D'où : $B\left(100;100\sqrt{3}\right)$.



2) a) *Calculer la distance approchée de AB au km près ?*

On rappelle que : $AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$

$$\begin{aligned}
AB &= \sqrt{\left(100-150\sqrt{3}\right)^2+\left(100\sqrt{3}-150\right)^2}\\
&= \sqrt{10\,000-2\times100\times150\sqrt{3}+22\,500\times3+10\,000\times3-2\times100\sqrt{3}\times100+10\,000}\\
&= \sqrt{10\,000-30\,000\sqrt{3}+67\,500+30\,000-20\,000\sqrt{3}+10\,000}\\
&= \sqrt{117\,500-30\,000\sqrt{3}-20\,000\sqrt{3}}\\
&= \sqrt{117\,500-50\,000\sqrt{3}}\\
&\simeq 176 \text{ kms.}
\end{aligned}$$

b) *Quelle est la vitesse approchée de l'avion arrondie à 1 km/h près ?*

En quinze minutes soit $\frac{1}{4}$ d'heure, l'avion a progressé d'environ 176 km.

Sa vitesse est donnée par :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{176}{0,25} = 704 \text{ km/h}$$